| 수업 활동지 No. 2016년 월 일 교시 2학년 5반 번호 : 이름: |
|---|

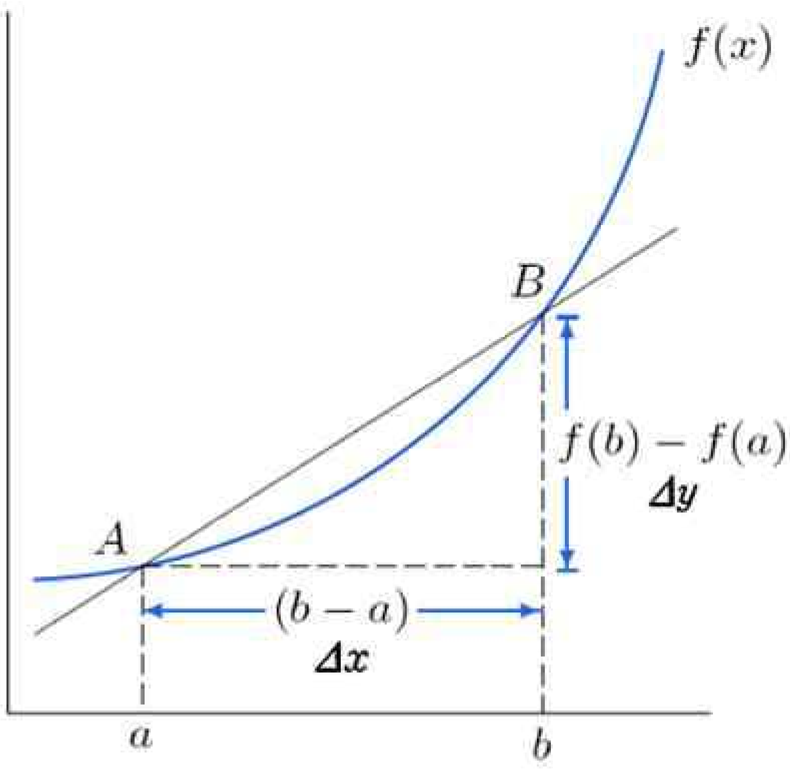
**11. 미분계수와 공식**

1) 평균변화율
2) 미분계수(순간변화율)
3) 미분가능성
4) 도함수
5) 미분공식

1) 평균변화율

평균의 의미는 산술평균의 의미이다.

즉, $\frac{a+b+c}{3}$의 개념을 이해하면 접근이 수월하다.




| |
|---|
| 3시간동안 60km를 움직였다면 ? 한 시간에 얼마 움직였을까 ?<br>이것이 바로 평균의 개념이다. |

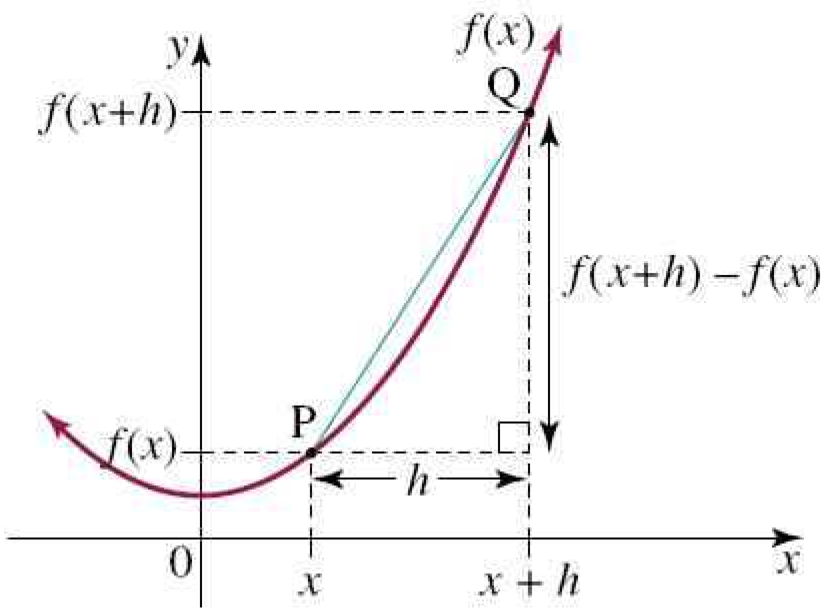
## 1) 평균변화율

함수 $f(x)$ 에서 $x$ 가 $a$ 에서 $b$ 까지 변할 때,

① **평균변화율**은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$(단, $\Delta x=b-a$)

② 평균변화율은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $P(a,\ f(a))$, $Q(b,\ f(b))$를 지나는 **직선 $\overleftrightarrow{PQ}$의 기울기**이다.

$\Delta x=h$라고 하면, 그래프를 아래와 같이 수정가능



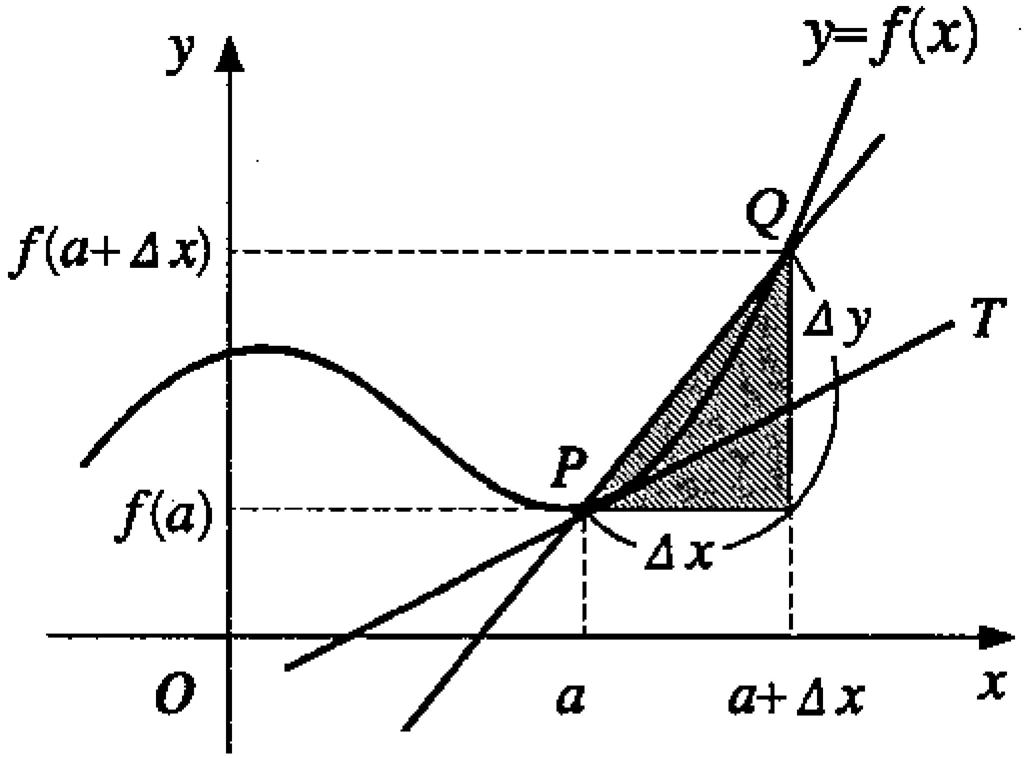

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

평균변화율은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $P(a,\ f(a))$, $Q(b,\ f(b))$를 지나는 **직선 $\overleftrightarrow{PQ}$의 기울기**이다.

## 2) 순간변화율

함수 $y=f(x)$의 구간 $[\ a,\ a+\Delta x]$에서의 평균변화율을 구하면,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$




평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 에서 $x$의 변화량 아주 작게 하면

즉 $\Delta x \to 0$ 에 대한 극한값을 구하면

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$가 존재하면,

함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하다**라고 한다.

이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 한다.

기호로 $f'(a)$로 나타낸다.

정리하면,

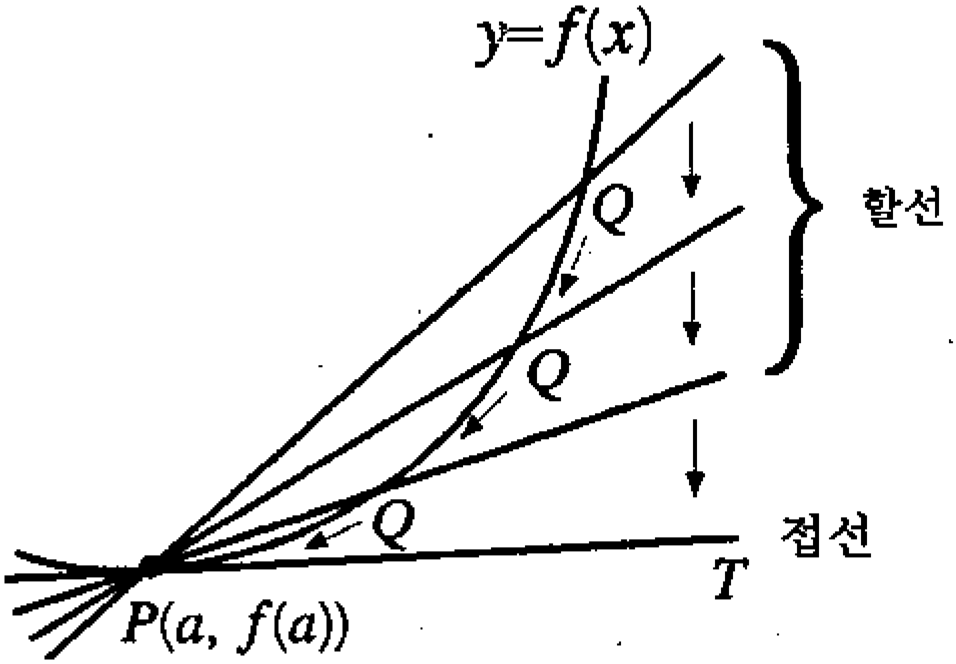
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= f'(a)\end{aligned}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

여기서 $b$ 가 변하기 때문에 $b$ 를 변수 $x$ 로 바꾸어 $b \to a$ 를 $x \to a$ 로 바꾸어 나타낸다.

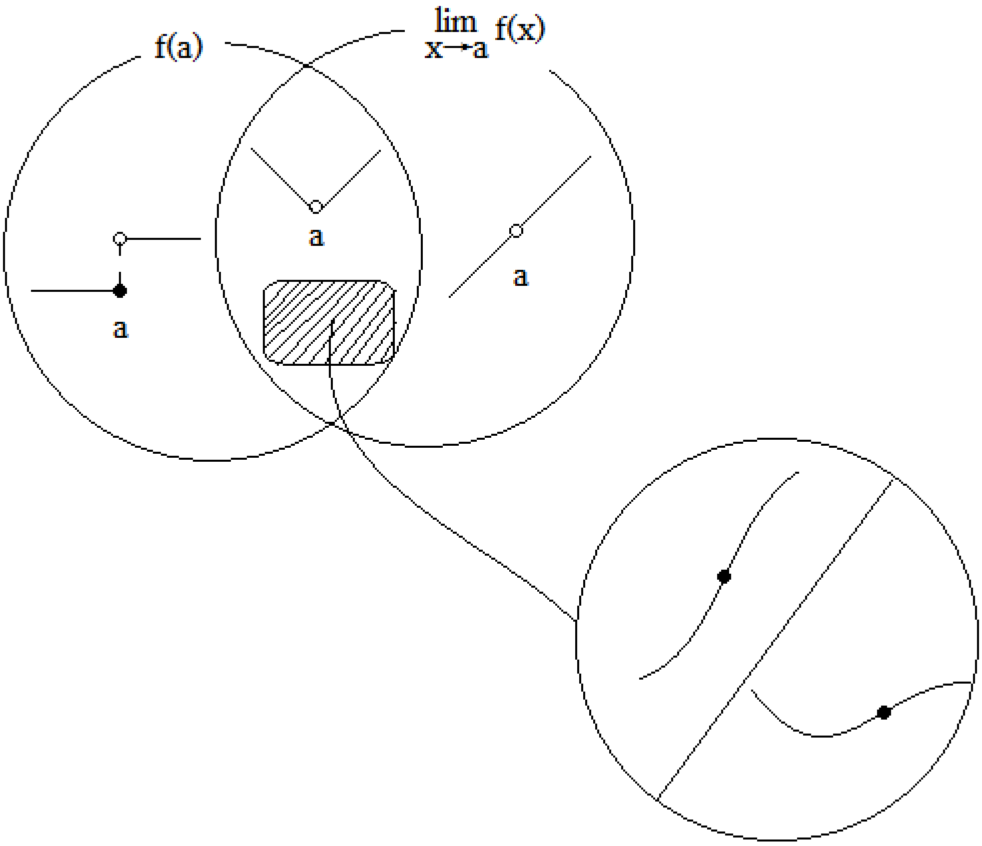
기하학적인 의미는

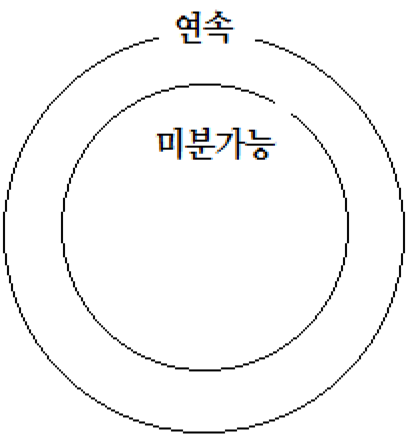
$f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$위의 정점 $x=a$에서 그은 접선의 기울기를 나타낸다.




미분계수의 기호 : $f'(a)$, $y'_{x=a}$, $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=a}$

## 3) 미분가능성과 연속성




① 미분가능

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 미분계수

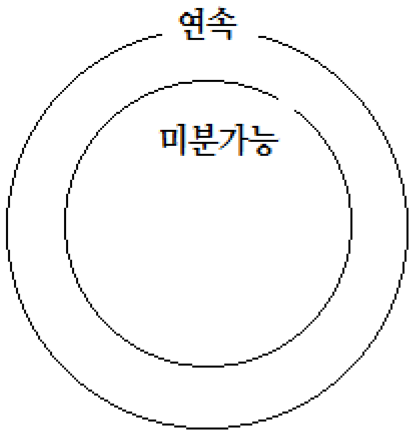
즉, $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재할 때

이 함수는 $x=a$에서 **미분가능(differentiable)**하다고 한다.

또 $f'(a)$가 존재하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분불능**이라고 한다.

**미분가능하다 라는 말은 접점의 기울기이다.**
**연속이 아니면 접점이 없다. 라고 해석하면 쉽게 이해될 듯**

(1) **함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. (역은 성립하지 않는다.)**




<증명>

$x=a$에서 함수 $y=f(x)$가 미분가능하면 $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이 존재한다.

$f'(a)$는 상수이므로

$$\lim_{h\to0}(f(a+h)-f(a))=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right\}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to0}h=f'(a)\cdot0=0$$

따라서 $\lim_{h\to0}f(a+h)=f(a)$ 여기서, $a+h=x$로 치환하면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하게 된다.

따라서, $x=a$에서 연속이 된다.

즉, $x=a$에서 미분가능한 함수는 $x=a$에서 연속이 된다는 것을 알 수가 있다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능한 것은 아니다.

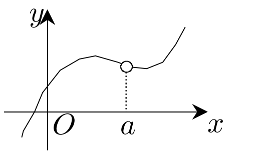
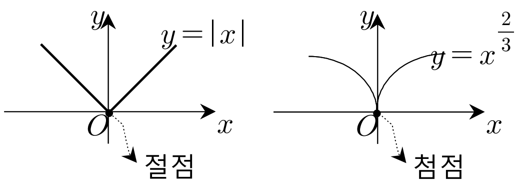
즉, 위 **(1)의 역은 성립하지 않는다.**

함수가 $x=a$에서 연속이지만 미분불능이 되는 점이 존재한다는 말이다.

미분가능의 기하학적 의미

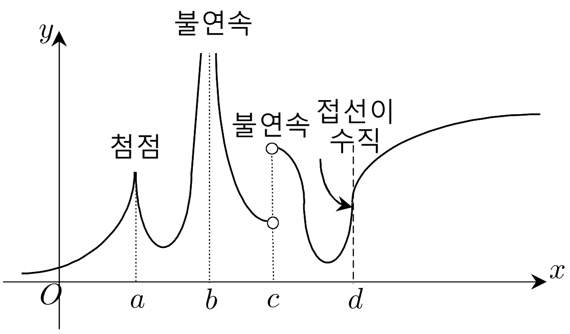
| |
|---|
| 그래프에서 **직선이나 곡선이 부드럽게 연결되어 접선의 기울기가 한 개만 있음**을 의미한다. |

(3) 그래프에서 **미분불능인 경우**는 **세 가지**의 경우를 생각할 수 있다.

| ① **불연속인 경우** | ② **그래프가 꺾이는 경우(첨점)** | ③ **접선이 수직이 되는 경우** |
|---|---|---|
| <br>$x=a$ 에서 미분불 |  | |

■ **절점**(joint point) : 직선이 만나서 꺾이는 점, **첨점**(sharp point) : 곡선이 만나서 꺾이는 점
⇒ 직선과 곡선이 만나서 꺾이는 경우도 있기 때문에 **넓은 의미로 모두 첨점**이라고 한다.

(예)




불연속점($x=b$, $x=c$), 첨점($x=a$), 접선이 수직인 점($x=d$)에서 미분불능이다.

$x=a$에서 미분가능성을 조사할 때

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 조사한다.

## 4) 도함수 : 함수에서 파생된 새로운 함수

(1) 함수 $y=f(x)$의 도함수(derivative) $f'(x)$는

| |
|---|
| 도함수의 정의<br>$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ |

- **모든 미분법의 공식은 이 도함수의 정의에서 유도된다.**

| |
|---|
| **★ 함수 $y=f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분한다라고 하고,<br>이것을 미분법이라고 한다.** |

(2) 도함수 $f'(x)$는 $y=f(x)$의 그래프 위의 **임의의 점** $(x, f(x))$**에서의 접선의 기울기**를 의미한다.

(3) 도함수의 기호 : $y'$, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$

- $\frac{dy}{dx}$의 읽기 : "$dydx$"라고 위에서 아래로 차례대로 읽는다. $\Rightarrow$ $dx$ 분의 $dy$는 틀린 표현이다.
- $\frac{d\square}{dx}$ 또는 $\frac{d}{dx}\square$ : "$\square$를 $x$에 대하여 미분하라"는 뜻이다.
- $f'(a)$는 미분계수의 정의로 일일이 구하지 않고도 도함수 $f'(x)$를 구하여 $x$ 대신 $a$를 대입하면 된다.

## 5) 미분법의 공식

※ 함수 $f(x)$에서 그 도함수 $f'(x)$를 구하는 과정을 **미분한다**고 하며, 그 계산방법을 **미분법**이라고 한다.

① 미분법(differentiation)의 기본공식

㉠ $f(x)=c$ ($c$는 상수) $\Rightarrow f'(x)=0$

㉡ $y=x^n$ $\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

㉢ $y=cf(x)$ $\Rightarrow y'=cf'(x)$

㉣ $y=f(x)\pm g(x)$ $\Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

㉤ $y=f(x)g(x)$ $\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

▪ $y=f\cdot g\cdot h \Rightarrow y'=f'gh+fg'h+fgh'$

▪ 적분법과 통계 : 나눗셈의 미분 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

② 합성함수의 미분(differential)

$y=f(g(x))$이면 $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

▪ $y=\{f(x)\}^n$이면 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$$

참고자료

① 완전제곱식으로 나눌 때의 나머지

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나눌 때

① 나누어 떨어 질 조건 : $f(a)=f'(a)=0$

② 나눈 나머지 : $f'(a)(x-a)+f(a)$