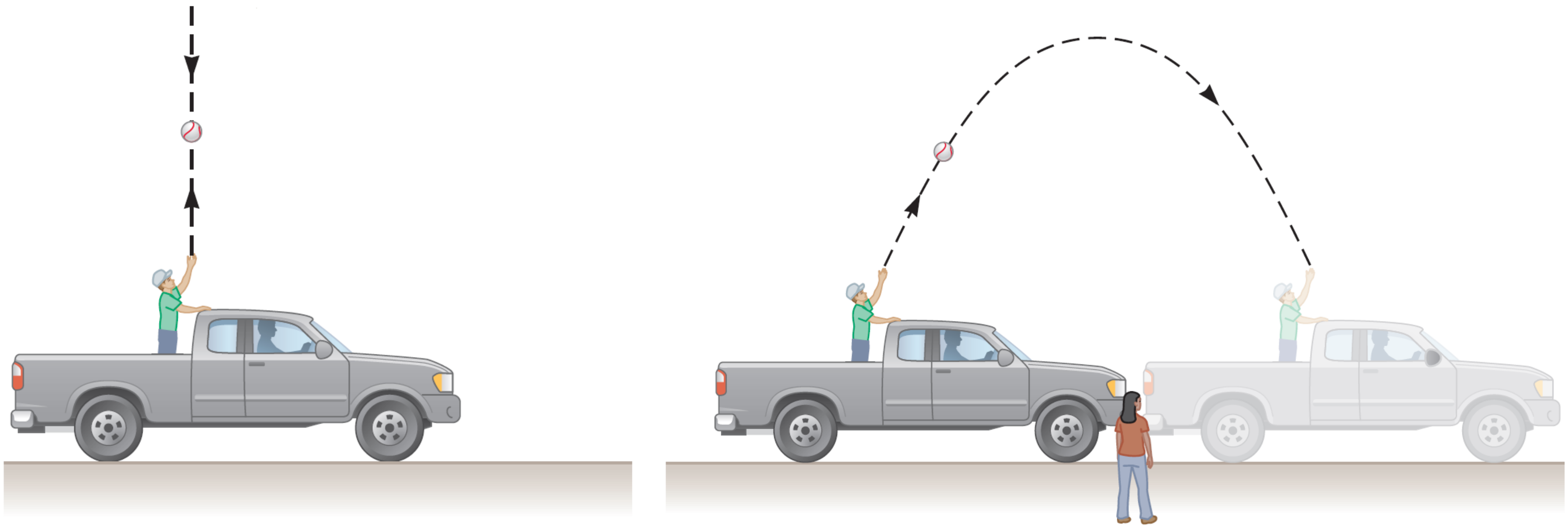
9장 상대성 이론
(Relativity)

갈릴레이의 상대성 원리

- 갈릴레이의 상대성 원리: 모든 관성기준계에서 역학 법칙은 불변이다.



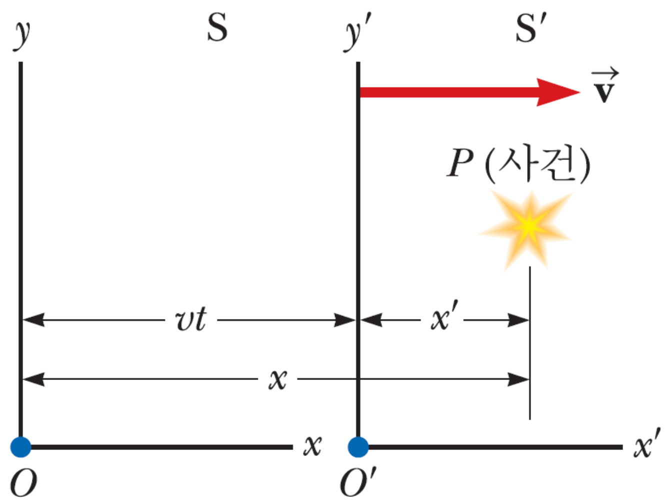
- 관측결과는 상대적으로 다르지만 그 측정들은 동일한 역학 법칙을 만족한다.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \leftrightarrow \sum \vec{F}' = m\vec{a}'$$

- 결과적으로, 관성기준계에 있는 관측자는 상대기준계를 통해서만이 자신의 운동상태를 알 수 있다.

갈릴레이 변환(Galilean Transformation): 단일 사건과 상대속도

▪ 갈릴레이 변환: 특정 사건을 한 관성기준계에서 측정한 결과를 다른 관성기준계에서의 측정결과와 서로 연결시켜주는 변환



• t=0일 때 두 기준계의 원점은 같고, 두 기준계의 시간은 t=t′=0으로 동기화되어야 한다.

• 사건 P를, S에서 측정한 시공간 좌표를 (x,y,z,t), S′에서 측정한 시공간 좌표를 (x′,y′,z′,t′)으로 표현한다.

• 기준계 S′은 기준계 S에 대해 상대적으로 등속도 v로 움직인다. 이때 v는 S에서 측정한 S′의 속도이다.

$$\boxed{x' = x - vt, y' = y, \ \ z' = z, \ \ t' = t}$$

(갈릴레이 좌표변환)

$$u_x = dx/dt, u_y = dy/dt, u_z = dz/dt$$

$$\boxed{u_x{}' = u_x - v, \ u_y{}' = u_y, \ \ u_z{}' = u_z}$$

(갈릴레이 속도변환)

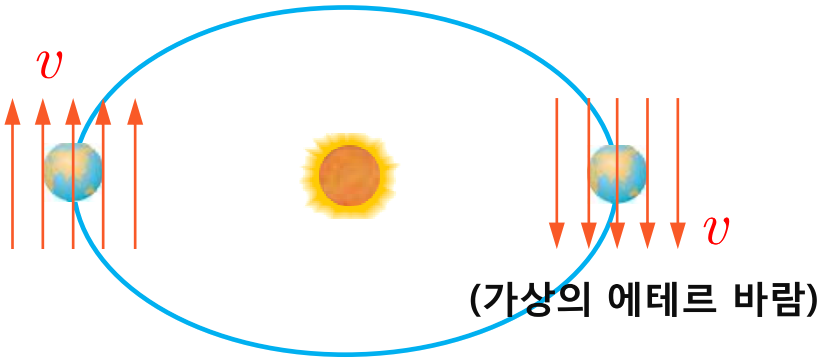
▪ 고전역학 체계에서 시간은 모든 관성기준계에서 동일한 비율로 흐른다.

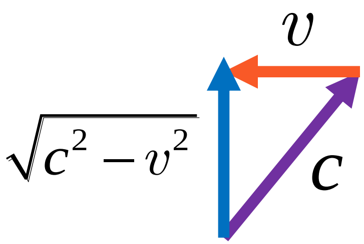
마이켈슨-몰리의 실험: 배경

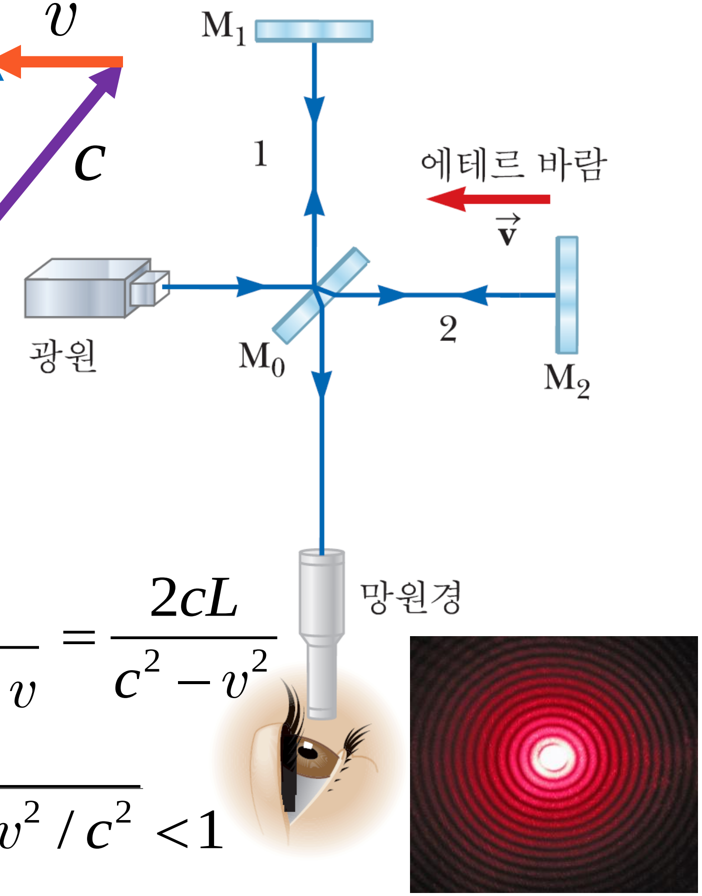
- 뉴턴역학의 갈릴레이 상대성은 전자기학(1865년)이나 광학 등에 적용 되지 않는다.
  - 전자기파의 속도(빛의 속도) $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2.99792 \times 10^8 m/s$
  - *c* 는 누구 또는 어떤 좌표계에 대한 속도인가?
  - 수면파나 음파와 같은 역학적인 파동은 전달되기 위해 모두 매질을 필요로 한다
- 19세기 후반 물리학자들은 빛이 진행하는 매질로서 발광성 에테르(luminiferous ether)를 생각했다.
  - 에테르는 절대 기준틀(absolute frame of reference)을 정의한다.
  - 빛의 속력은 이 기준틀에서 *c* 이다.
- 에테르의 존재를 보이기 위한 마이켈슨-몰리의 실험(1887년)
  - 마이켈슨 간섭계
  - 에테르에 대한 지구의 상대속도를 측정하기 위한 실험

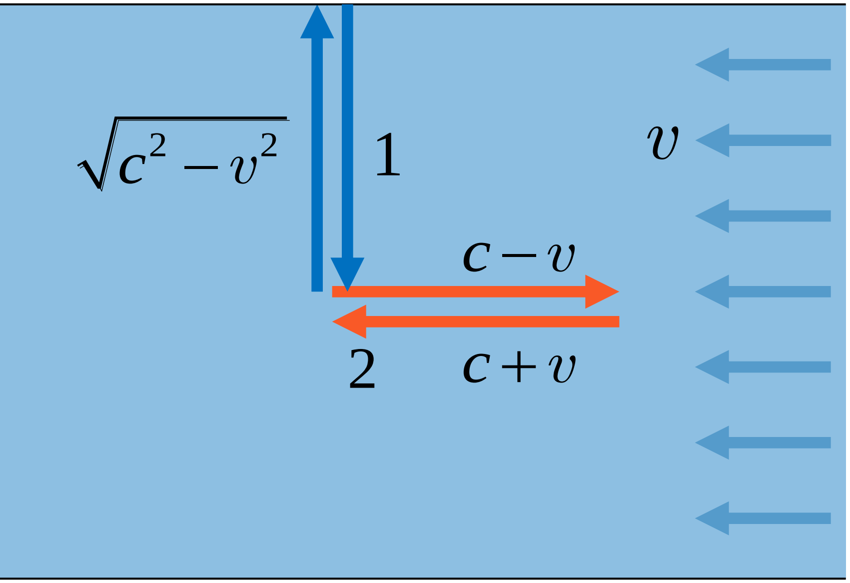
마이켈슨-몰리의 실험: 결과

- 마이켈슨 간섭계를 이용하여 에테르에 대한 지구의 상대속력을 측정하려는 실험의도









$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}$$

$$\therefore t_1 / t_2 = \sqrt{1 - v^2 / c^2} < 1$$

$$t_2 > t_1$$

- 어떠한 경우에도 마이켈슨 간섭계의 무늬는 변화하지 않았다.!!!

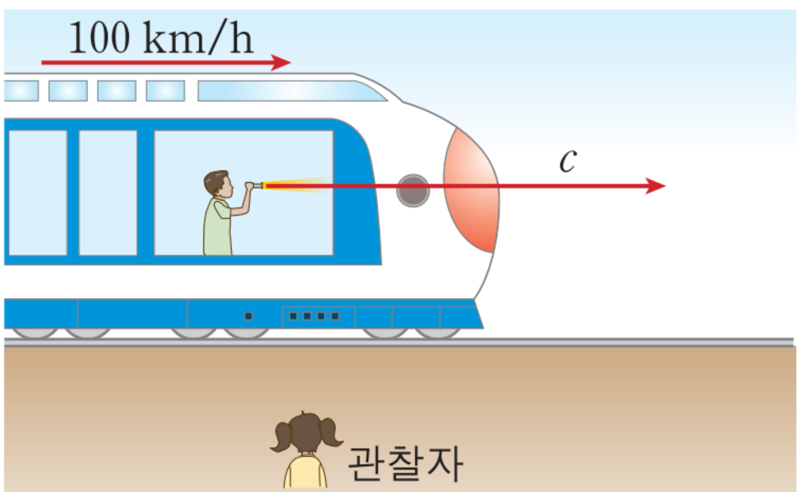
아인슈타인의 상대성 원리

1. 상대성 원리: 모든 관성기준계에서 모든 물리법칙은 불변이다.

2. 광속도 불변의 원리: 진공에서의 광속은 모든 관성기준계에서 모든 방향에 대하여 동일한 c 이다. (관측자나 광원의 속도에 무관하다.)

▪ **광속도 불변 검증 실험 : 중성 파이온의 붕괴**

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$



▪ **1964년 CERN 입자가속기에서 0.99975c의 속력으로 움직이는 중성파이온 다발을 만듬**

▪ **실험실 좌표계에서 정지하여 있는 파이온에서 방출되는 감마선의 속력을 측정하여 광속을 얻음**

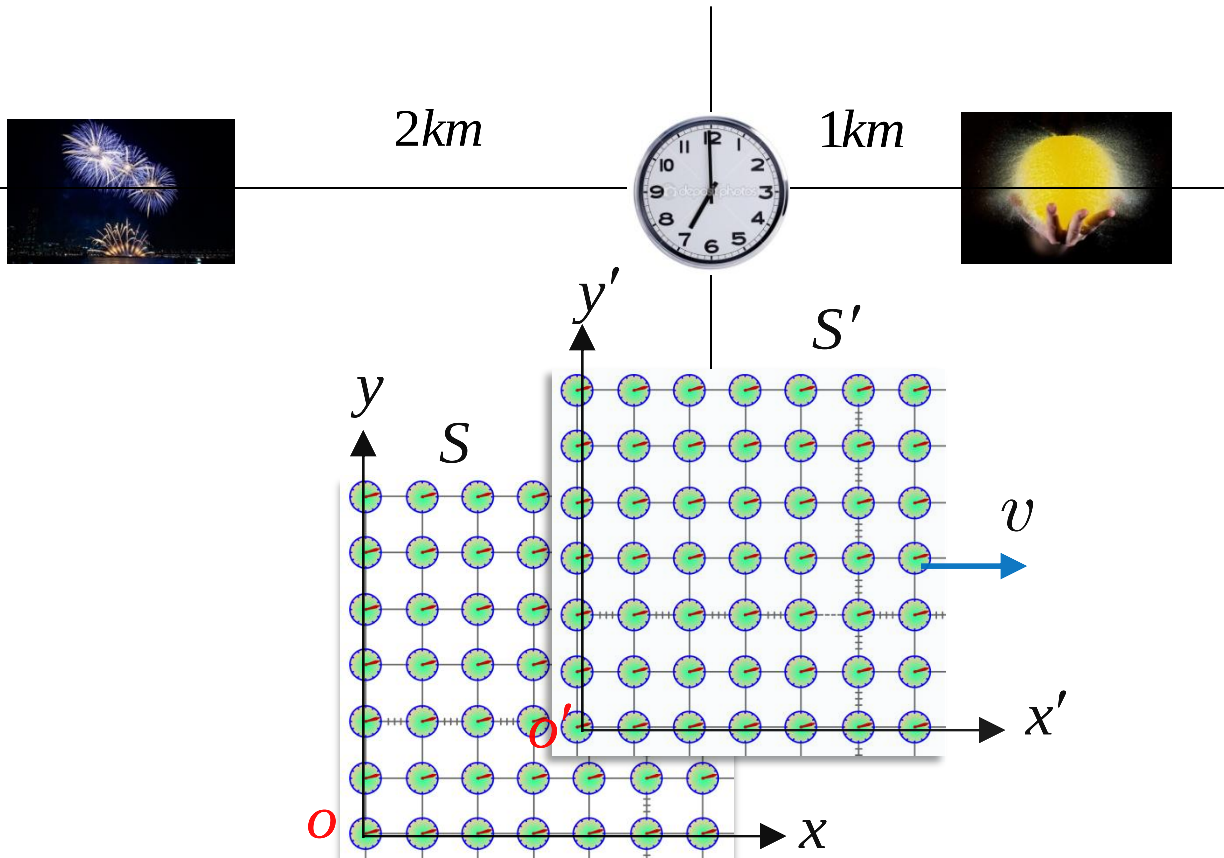
▪ **빠르게 움직이는 광원에서 방출되는 감마선의 속력을 측정하여 동일한 광속을 얻음**

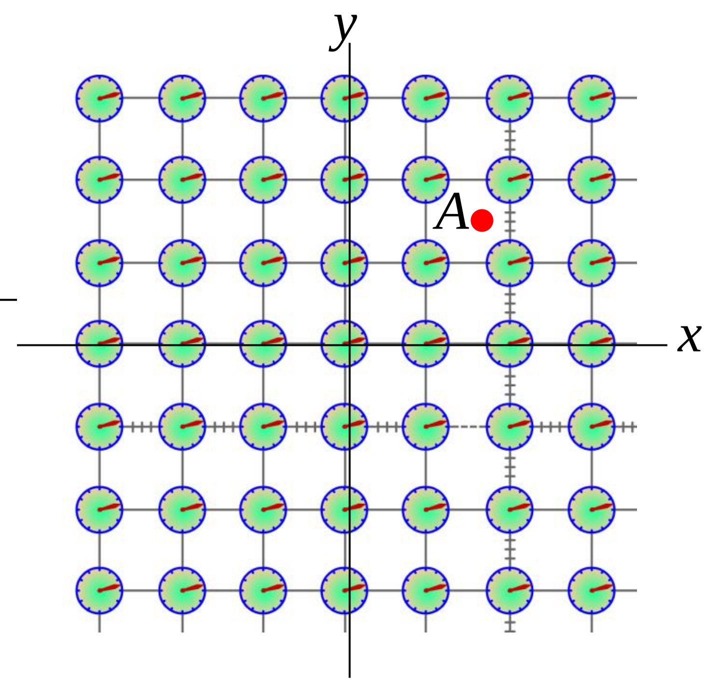
사건의 측정: 시공간 좌표, 동기화

- **사건이란 어떤 일이 일어나는 것이며, 관측자는 이 사건에 세 개의 공간좌표와 하나의 시간좌표를 부여할 수 있다.**

  - 사건에는 (1) 전구의 점멸, (2) 두 입자의 충돌 (3) 폭발, (4) 빛의 특정한 점 통과 등등

- 사건에 시공간 좌표를 부여하는 방법



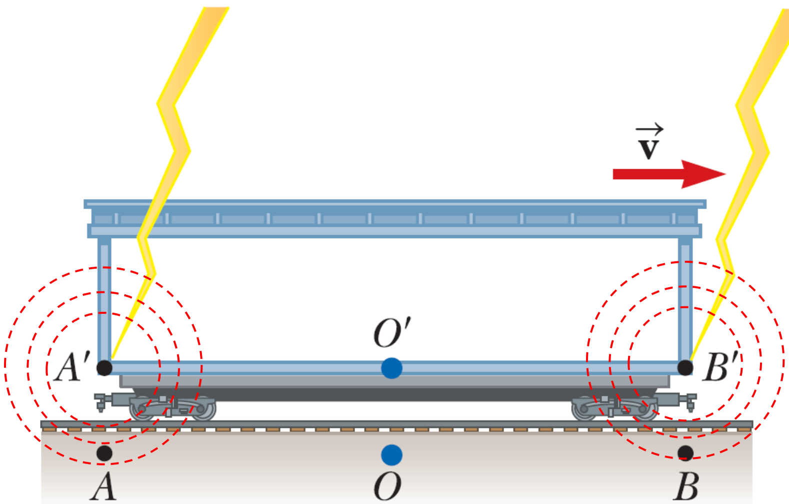


(공간좌표, 시간의 동기화)

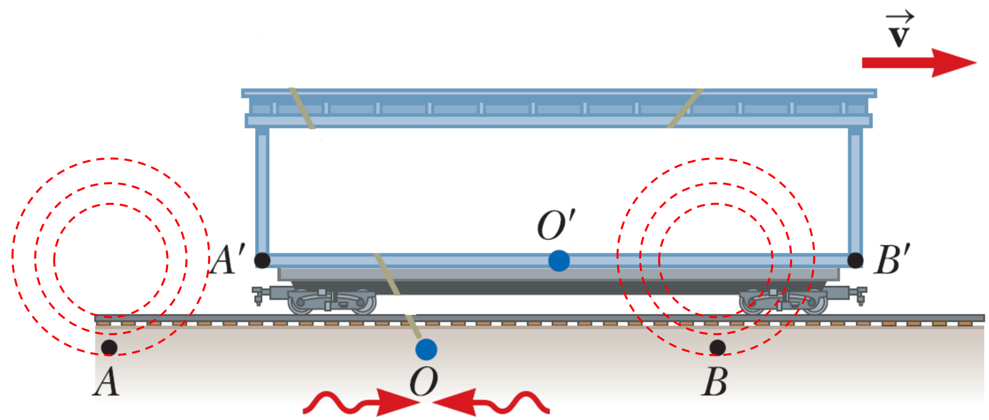
특수 상대성 이론의 결과: 사건의 동시성

- **한 기준계에서 동시인 사건들이 다른 기준계에서는 동시가 아니다.**
- **동시성은 관측자의 운동에 의존하며 절대적인 아닌 상대적인 개념이다.**

• 사고 실험: 점광원에서 나오는 빛을 서로 다른 관성계의 관측자들이 볼 때 빛의 파면은 관측자와 무관하게 동심원을 그리며 퍼져나간다.



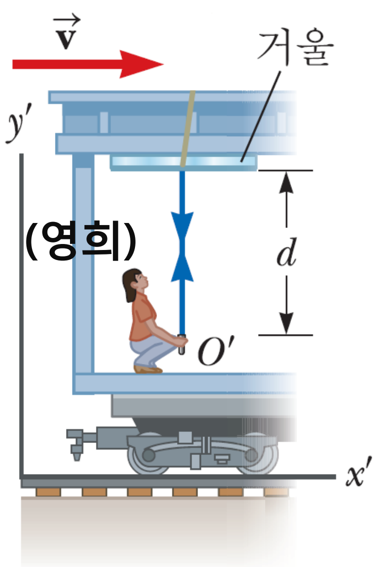
• 관측자 O에게 두 번개가 동시에 친 것으로 측정되었다고 가정한다.

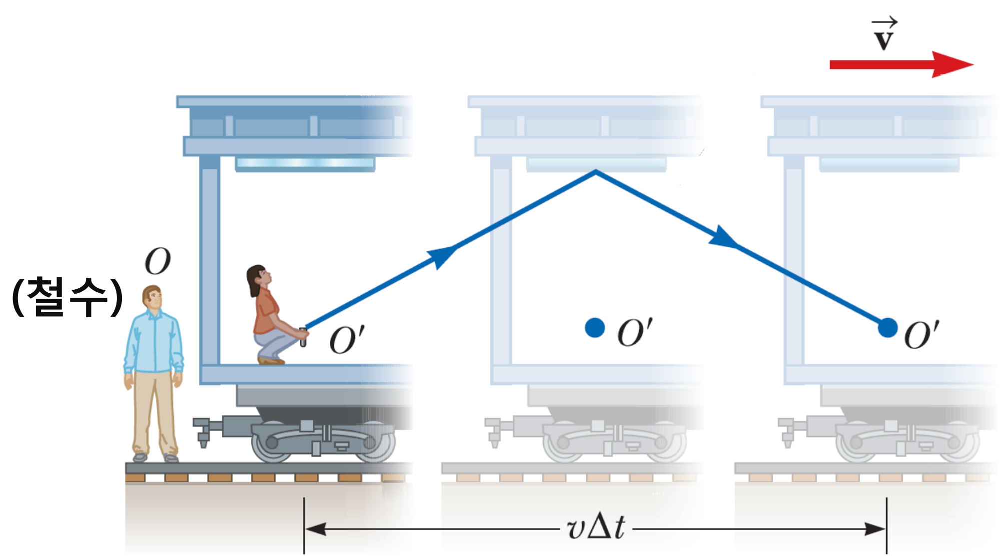


• 관측자 O′에게 두 번개는 동시에 치지 않은 것으로 나타난다. A′지점보다 B′지점에 번개가 먼저 친 것으로 측정한다.

특수 상대성 이론의 결과: 시간의 상대성

- **두 사건 사이의 시간간격은 시간과 공간 모두에서 그들이 얼마나 떨어져 있는가에 따라 결정된다. 즉 사건의 시간적 분리와 공간적 분리는 서로 얽혀 있다.**
  - 사건 1: 빛이 광원을 떠나는 것
  - 사건 2: 빛이 광원으로 돌아오는 것
  - 한 관측자에게는 두 사건이 동일한 장소에서 일어나는 것으로 제한한다.

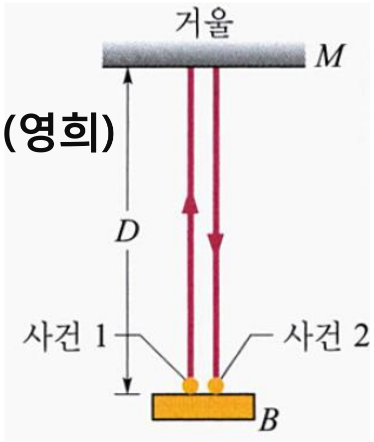


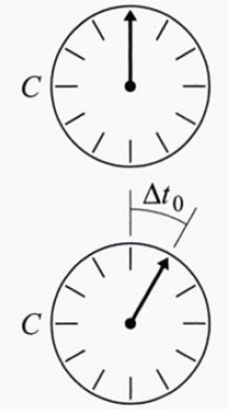


- 기차 안에 정지하고 있는 영희가 보는 광시계의 두 사건
- 지면에 정지하고 있는 철수가 보는 광시계의 두 사건

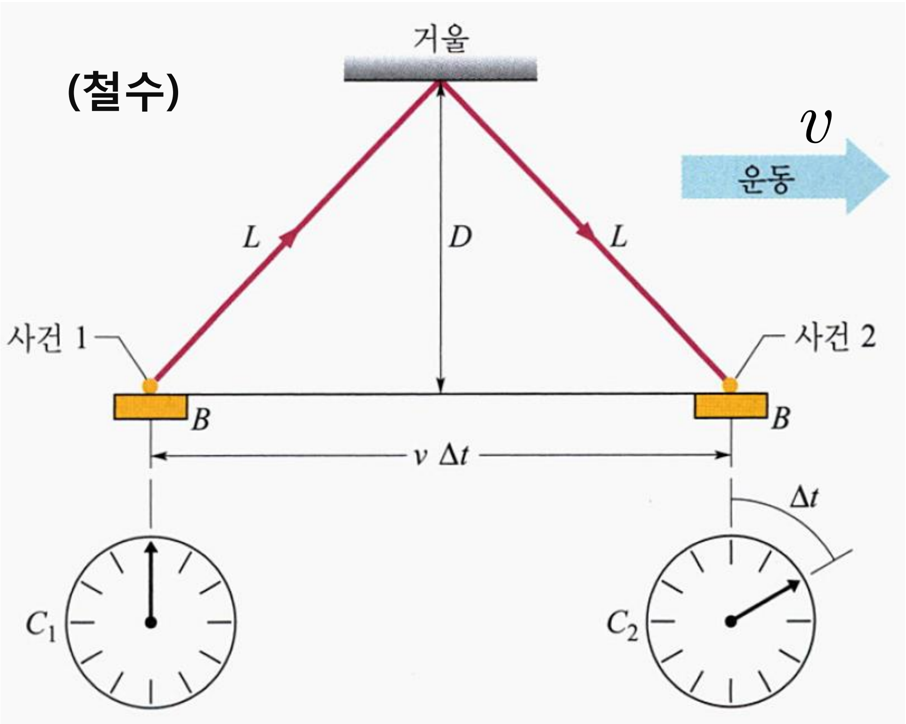
특수 상대성 이론의 결과: 시간의 상대성

(영희)





(철수)



$$L^2 = D^2 + (v\Delta t/2)^2$$

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

$$= \frac{2\sqrt{D^2 + (v\Delta t/2)^2}}{c}$$

$$\therefore \Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \gamma \Delta t_0$$

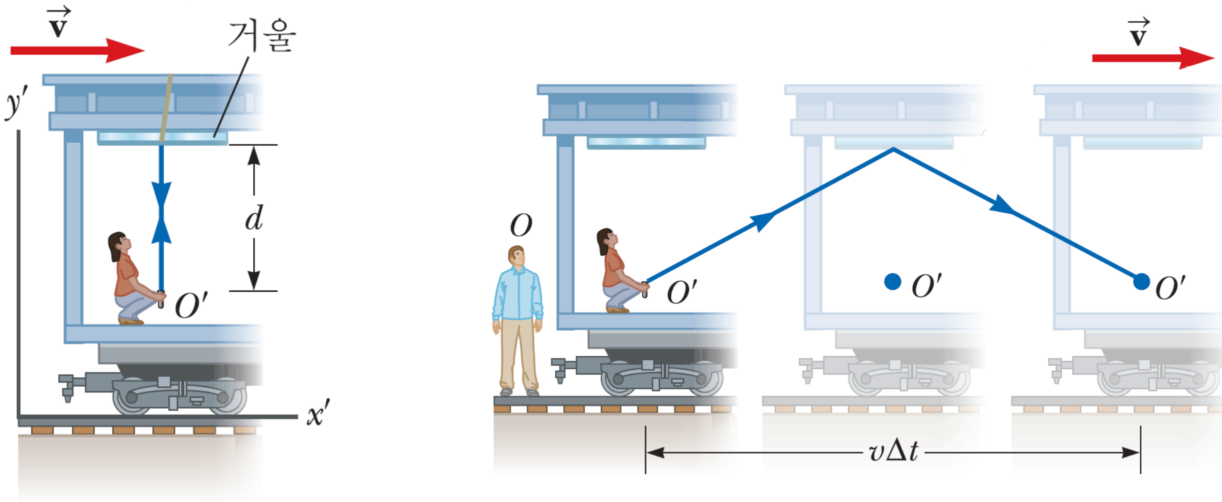
- 철수가 측정하는 두 사건의 시간간격

- 영희가 측정하는 두 사건의 시간간격

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_0, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

특수 상대성 이론의 결과: 시간의 상대성



- 동일한 장소에서 일어난 두 사건의 시간간격을 고유시간(proper time interval)이라 한다.

$$\Delta t_p \ at\ \Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$$

- 상대적으로 움직이는 시계의 시간이 더 느리게 가는 것으로 관측된다.(시간팽창 효과)

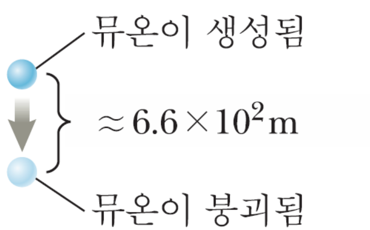
$$\Delta t = \gamma \Delta t_p, \ \ \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \geq 1$$

특수 상대성 이론의 결과: 시간의 상대성 검증 실험

- **시간 팽창에 대한 두 가지 검증 실험** $\Delta t = \gamma \Delta t_0, \ \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

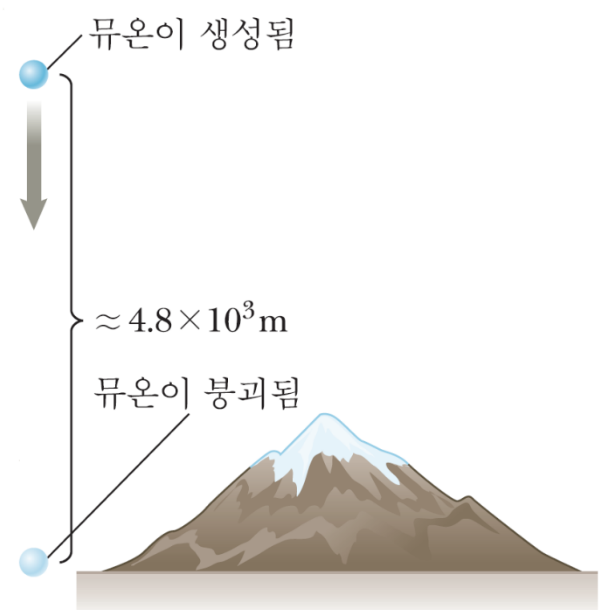
• 미시적 시계: 뮤온의 생성(사건1)과 붕괴(사건2) 사이의 시간간격 즉, 수명 측정

비상대론적 계산 **뮤온의 수명:** $\Delta t_p = 2.2 \mu s$ **상대론적 계산**



$$l \approx c\Delta t_p$$

$$= (3.0\times10^8\,\mathrm{m/s})(2.2\times10^{-6}\,\mathrm{s}) = 660\,\mathrm{m}$$



• 거시적 시계: 1971년 헤이펠과 키팅은 세슘원자시계로 지구 자전방향과 반대방향으로 지구를 각각 일주하여 10% 오차 안에서 실제 시간팽창을 확인함.

예제 9.1 진자의 주기는 얼마인가? (진자시계)

- 진자의 기준계에서 측정한 진자의 주기가 3.00s이다. 진자에 대해 0.960c로 움직이는 관측자가 측정한 진자의 주기는 얼마인가?

- 진자의 기준계에서 측정한 주기가 고유시간이다.
- 움직이는 관측자의 관점에서는 진자가 움직인다.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \;\; \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\therefore \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - (0.960c)^2/c^2} = 3.57$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 3.57 \times 3.00s = 10.7s$$

특수 상대성 이론의 결과: 길이의 상대성

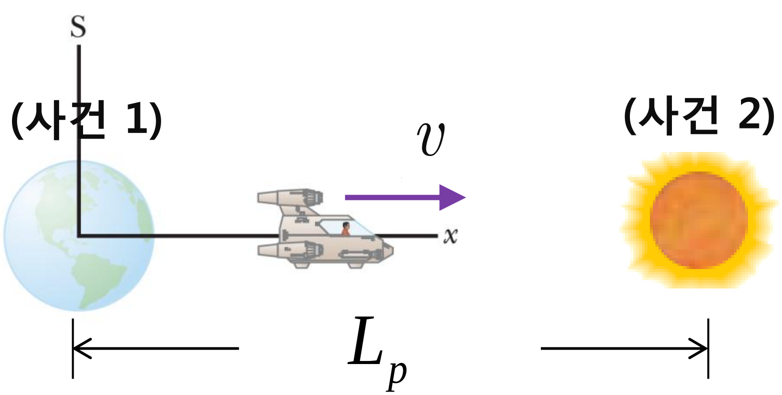
- **고유길이(proper length): 물체에 대해 정지해 있는 사람이 측정한 길이**
- **움직이는 물체의 길이 또는 공간간격은 동시에 측정되어야 한다.**
- 지구에서 출발하여 어느 별을 향하여 속력 v로 움직이는 우주선을 생각한다.
  - 사건 1: 지구에서 우주선의 출발
  - 사건 2: 어느 별에 우주선의 도착

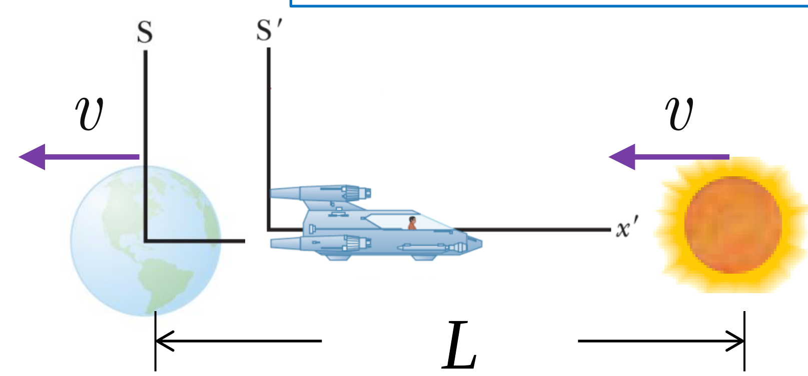
	지구-별 거리	지구-별 도착 시간
지구의 관측자	L_p	Δt
우주선 안의 관측자	L	Δt_p

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p$$

$$L_p = v\Delta t, \ \ L = v\Delta t_p \qquad \therefore L / L_p = \Delta t_p / \Delta t = 1/\gamma$$

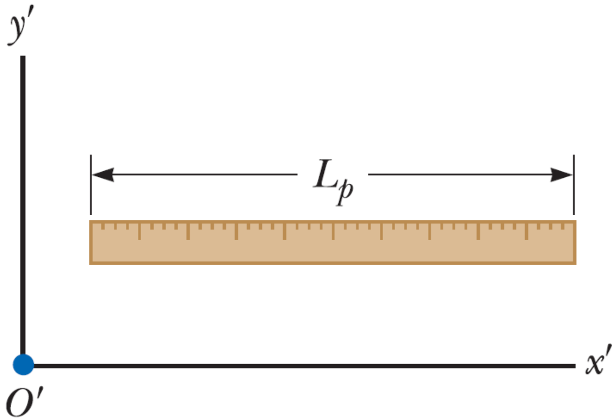
$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma} L_p = L_p \sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$



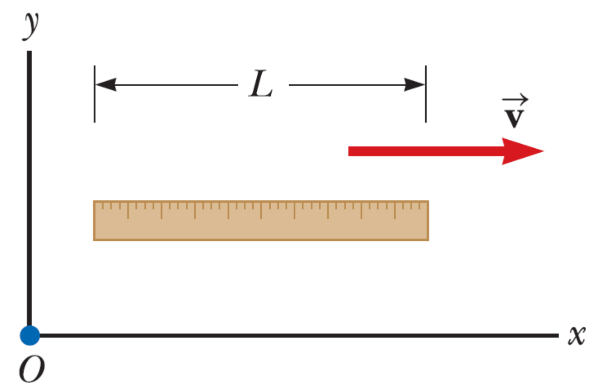


특수 상대성 이론의 결과: 길이의 상대성

- 고유길이(proper length): 물체에 대해 정지해 있는 사람이 측정한 길이
- 움직이는 물체의 길이 또는 공간간격은 동시에 측정되어야 한다.

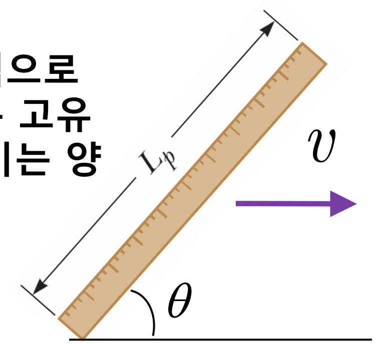


막대와 함께 움직이는 기준계의 관측자가 재는 길이는 고유 길이 L_p 이며 단순히 양 끝점의 좌표값을 빼주면 되며 양 끝점을 동시에 측정하지 않아도 된다.



관측자가 있는 기준틀에 대해 상대적으로 움직이는 막대의 길이를 측정한 값은 고유길이보다 짧다. 움직이는 물체의 길이는 양 끝점을 동시에 측정해야 한다.

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p = L_p \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



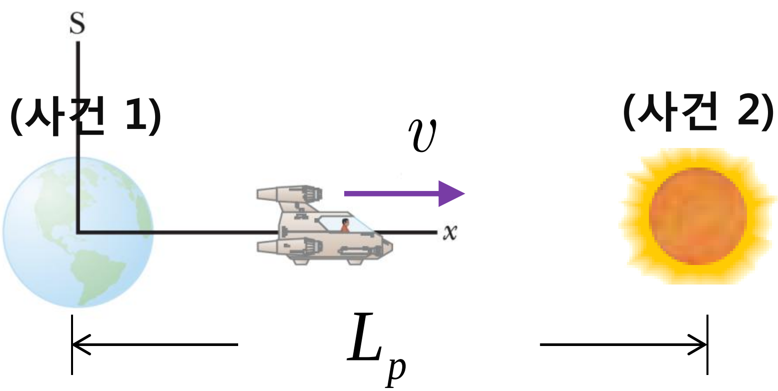
- 움직이는 물체의 길이는 고유길이에 상대적으로 수축된다.
- 길이 수축은 상대운동을 하는 방향에서만 일어난다.

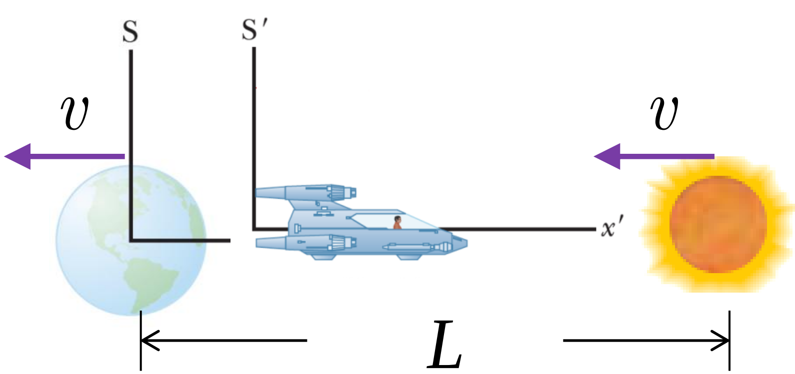
$$L_x = L_p sin\theta \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$L_y = L_p cos\theta$$

예제 9.2 시리우스 별로의 여행

- 한 우주인이 지구로부터 8광년 떨어진 시리우스 별로 우주 여행을 떠났다. 우주인은 가는데 6년이 걸릴 것으로 측정했다. 우주선이 0.8c 의 일정한 속력으로 간다면, 어떻게 8광년의 거리가 우주인이 측정한 6년으로 맞춰질 수 있는가?





- 지구에서 측정한 시리우스 별까지의 거리는 8광년
- 우주인의 기준계에서 지구와 별은 움직인다.

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p = L_p \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$L_p = 8ly, \quad L = L_p \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$= 8ly \times \sqrt{1 - (0.8c)^2 / c^2}$$

$$= 5ly$$

- 우주인이 측정한 여행 시간(고유시간)은

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L}{0.8c} = \frac{c \times 5yr}{0.8c} = 6yr$$

로렌츠 변환식(Lorentz Transformation)

- **로렌츠 변환: 하나의 사건을, 한 기준계에서 측정한 결과를 다른 기준계에서의 측정 결과와 서로 연결시켜주는 변환으로서 고전적인 갈릴레이 변환의 일반화 (1890년)**
  - 마이켈슨-몰리 실험의 결과를 설명하기 위해 운동하는 방향의 길이의 수축 가설과 전자기학에 기초하여 1890년에 로렌츠가 유도함.
  - 특수상대론의 두 가설로부터 유도할 수 있으며 에테르에 대한 존재를 필요치 않음.
  - 사건 P의 시공간좌표 $S:\ (x,y,z,t),\quad S':\ (x',y',z',t')$

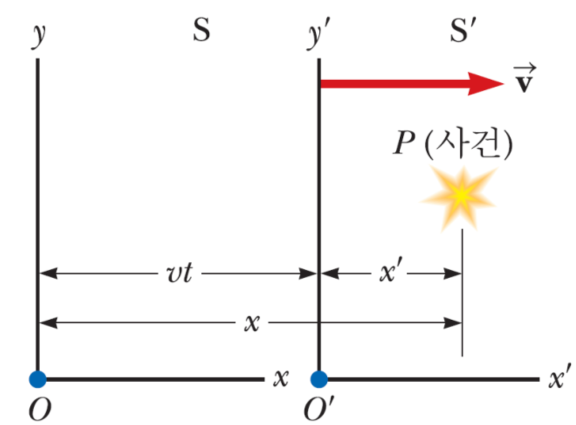
$$x' = \gamma(x - vt),\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

$$S \to S'$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \gamma(x' + vt'),\quad y = y',\quad z = z',\quad t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

$$S' \to S$$



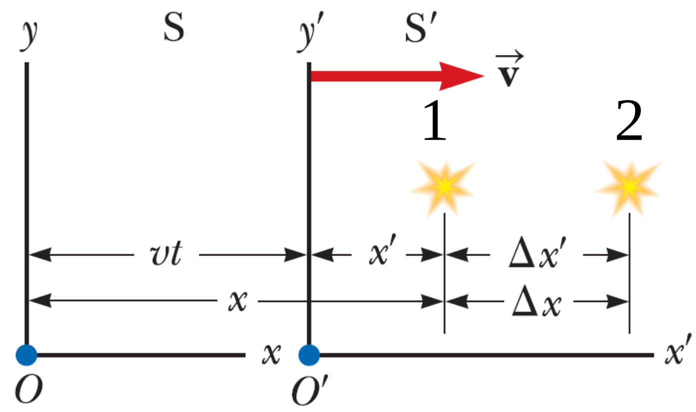
$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- $v \ll c$ 인 경우 로렌츠 변환은 갈릴레이 변환으로 된다.

$$v \ll c;\ \gamma \to 1,\ v/c^2 \to 0\quad \to x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$$

로렌츠 변환식(Lorentz Transformation): 두 사건의 시공간 간격

$$x' = \gamma(x - vt),$$
$$y' = y, \quad z' = z,$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$
$$(S \to S')$$



$$\Delta x' = x_2' - x_1', \ \Delta x = x_2 - x_1, \ \Delta t' = t_2' - t_1', \ \Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t),$$
$$\Delta y' = \Delta y, \ \Delta z' = \Delta z,$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)$$
$$S \to S'$$

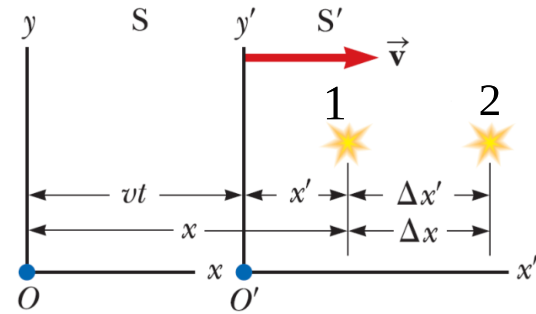
$\Leftrightarrow$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'),$$
$$\Delta y = \Delta y', \ \Delta z = \Delta z',$$
$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2)$$
$$S' \to S$$

로렌츠 변환식(Lorentz Transformation): 동시성, 시간팽창, 길이수축 유도

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2) \quad (S \to S')$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2) \quad (S' \to S)$$



- **사건의 동시성 유도 : S′에서 동시인 사건들이 S에서는 일반적으로 동시가 아니다.**

$$\Delta t' = 0 : \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2) = \gamma v \Delta x' / c^2 \neq 0$$ **(S′에서 동시인 사건들)**

- **시간팽창 유도 : 두 사건이 S′의 같은 장소에서 다른 시간에 발생하였다고 하자.**

$$\Delta x' = 0,\ \Delta t' \neq 0 : \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2) = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_p \quad \therefore \Delta t = \gamma \Delta t_p$$

$$(\Delta t' = \Delta t_p)$$

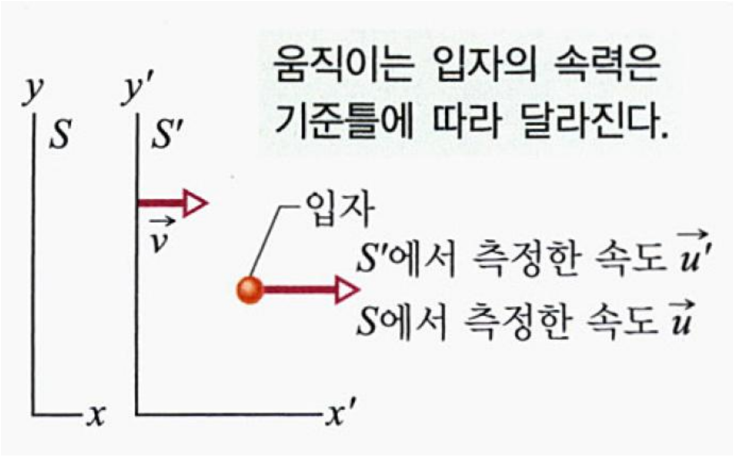
- **길이수축 유도 : 어떤 막대가 x, x′축에 평행하고, S′에서 정지해 있다고 가정하자.**

$$\Delta x' = L_p, \Delta t = 0 : \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma \Delta x,\ \Delta x = L \quad \therefore L = L_p / \gamma$$

로렌츠 속도변환

- **로렌츠 변환식을 이용하여 갈릴레이 속도변환에 대응하는 상대론적인 속도변환을 얻는다.**

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t),$$
$$\Delta y' = \Delta y,\ \ \Delta z' = \Delta z,$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)$$
$$(S \to S')$$



$$u_x' \equiv dx'/dt',$$
$$u_x \equiv dx/dt,$$

- **S에서 측정한 입자의 속도를 S'에서의 속도로 변환할 수 있다.**

$$dx' = \gamma(dx - v dt),$$
$$dy' = dy,\ \ dz' = dz,$$
$$dt' = \gamma(dt - v dx / c^2)$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx/dt - v}{1 - v(dx/dt)/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy/dt}{\gamma(1 - v(dx/dt)/c^2)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

$$u_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

로렌츠 속도변환

- S에서 측정한 입자의 속도를 S′에서의 속도로 변환할 수 있다.

$$u_x{}' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2},\ u_y{}' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)},\ u_z{}' = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

- S′에서 측정한 입자의 속도를 S에서의 속도로 변환할 수 있다.

$$u_x = \frac{u_x{}' + v}{1 + u_x{}' v / c^2},\ u_y = \frac{u_y{}'}{\gamma(1 + u_x{}' v / c^2)},\ u_z = \frac{u_z{}'}{\gamma(1 + u_x{}' v / c^2)}$$

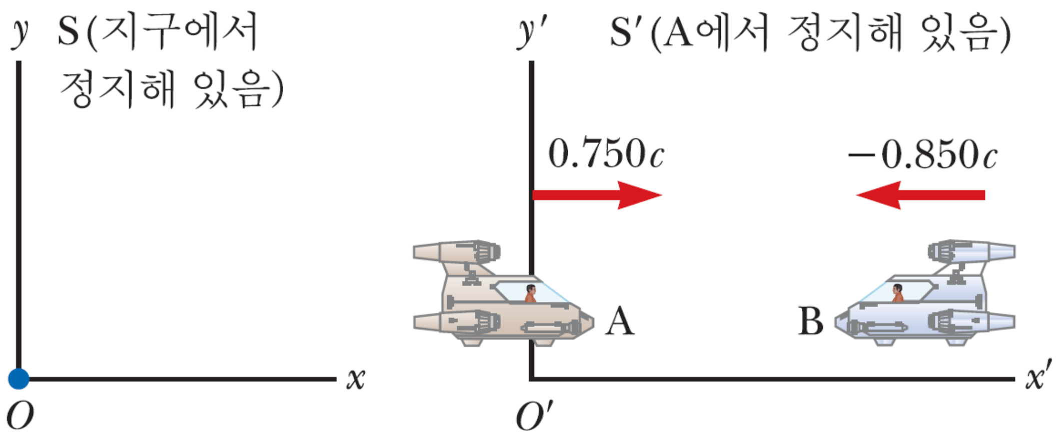
- S에서 측정한 빛의 속도는 S′에서 측정한 속도와 같고 그 역도 성립한다. (광속불변)

$$S : u_x = c,\ u_y = u_z = 0 \rightarrow S' : u_x{}' = \frac{c - v}{1 - cv / c^2} = c\left(\frac{c - v}{c - v}\right) = c!!$$

$$u_y{}' = u_z{}' = 0$$

예제 9.4 두 우주선의 상대속도

- 두 우주선 A와 B가 그림처럼 서로 마주보고 움직인다. 지상에 있는 관측자가 측정한 우주선 A의 속력은 0.750c, B의 속력은 0.850c이다. 우주선 A에 있는 우주인이 측정한 우주선 B의 속도를 구하라.



- 이 경우 지상과 우주선 A가 관측자가 되고 우주선 B가 관측 대상이 된다.
- 일차원이므로 한 방향만 고려한다.

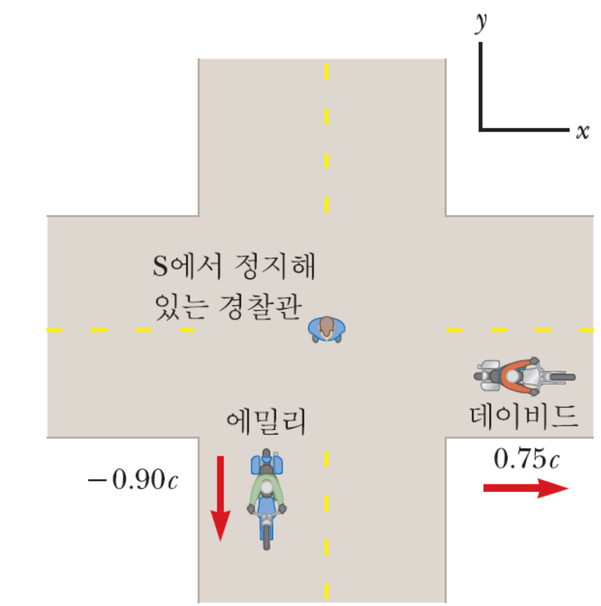
$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2},$$

- S에서 측정한 우주선 A의 속도: $v = 0.750c,$
- S에서 측정한 우주선 B의 속도: $u_x = -0.850c$

$$\therefore u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} = \frac{-0.850c - 0.750c}{1 - (-0.850c) \times (0.750c) / c^2} = -0.977c$$

예제 9.5 상대론적인 속력으로 경주하는 오토바이 폭주족

▪ 오토바이 폭주족인 데이비드와 에밀리가 그림에서처럼 직교하는 교차로에서 상대론적인 속력으로 경주하고 있다. 데이비드가 그의 어깨너머로 볼 때 에밀리는 얼마나 빨리 멀어져 가고 있는가?



▪ 이 경우 경찰관과 데이비드가 관측자가 되고 에밀리가 관측 대상이 된다.

▪ 이차원이므로 두 방향 모두 고려해야 한다.

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}$$

• S에서 측정한 데이비드의 속도: $v = 0.75c,$

• S에서 측정한 에밀리의 속도: $u_x = 0,\ u_y = -0.90c$

▪ 데이비드가 측정한 에밀리의 상대속도는

$$u_x' = \frac{0 - 0.75c}{1 - 0 \times 0.75c / c^2} = -0.75c, \quad u_y' = \frac{-0.90c}{(1 - 0 \times 0.75c / c^2)} \times \sqrt{1 - (0.75c)^2 / c^2}$$

$$= -0.60c$$

$$\therefore (u_x', u_y') = (-0.75c, -0.60c), \quad u' = 0.96c$$

상대론적 운동량과 뉴턴 법칙의 상대론적 형태

$$\boxed{\begin{aligned} p &\equiv mu \\ &= mdx/dt \end{aligned}}$$

(충돌 전) (충돌 후)

- S 기준계에서 운동량 보존은

$$m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C + m_D u_D$$

- S′ 기준계에서 운동량 보존을 알아보기 위하여 갈릴레이 속도변환을 하면

$$u' = u - v \quad \rightarrow u = u' + v$$

$$m_A(u_A' + v) + m_B(u_B' + v) = m_C(u_C' + v) + m_D(u_D' + v)$$

$$\rightarrow m_A u_A' + m_B u_B' = m_C u_C' + m_D u_D', \quad m_A + m_B = m_C + m_D$$

- S′ 기준계에서도 질량보존과 함께 운동량은 보존된다.

상대론적 운동량과 뉴턴 법칙의 상대론적 형태

$$\boxed{\begin{aligned} p &\equiv mu \\ &= m\,dx/dt \end{aligned}}$$

(충돌 전) (충돌 후)

- S 기준계에서 운동량 보존은

$$m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C + m_D u_D, \quad m_A + m_B = m_C + m_D$$

- S′ 기준계에서 운동량 보존을 알아보기 위하여 로렌츠 속도변환을 하면

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}, \quad e.g. \left(u_A = \frac{u_A' + v}{1 + u_A' v/c^2} \right)$$

$$m_A \left(\frac{u_A' + v}{1 + u_A' v/c^2} \right) + m_B \left(\frac{u_B' + v}{1 + u_B' v/c^2} \right) = m_C \left(\frac{u_C' + v}{1 + u_C' v/c^2} \right) + m_D \left(\frac{u_D' + v}{1 + u_D' v/c^2} \right)$$

- S′ 기준계에서는 운동량이 보존되지 않는다??

상대론적 운동량과 뉴턴 법칙의 상대론적 형태

- 상대론적 운동량의 정의 : $\vec{p} \equiv \gamma m\vec{u} = \dfrac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ $\rightarrow \vec{p} \approx m\vec{u} \ \ (u \ll c)$
- S 기준계에서 운동량 보존은 $\gamma_A m_A u_A + \gamma_B m_B u_B = \gamma_C m_C u_C + \gamma_D m_D u_D$
- S′ 기준계에서 운동량 보존을 알아보기 위하여 로렌츠 속도변환을 하면

$$u' = \frac{u-v}{1-uv/c^2} \rightarrow u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(1+u'v/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

$$\rightarrow \gamma = \gamma_v \gamma' (1+u'v/c^2)$$

$$\boxed{\gamma'_A m_A u_A' + \gamma'_B m_B u_B' = \gamma'_C m_C u_C' + \gamma'_D m_D u_D'}$$

$$\boxed{\gamma'_A m_A + \gamma'_B m_B = \gamma'_C m_C + \gamma'_D m_D}$$

- S′ 기준계에서도 상대론적 운동량 정의를 이용하면 운동량은 보존된다.
- But, 비상대론적인 경우에 질량 보존에 대응하는 것처럼 보이는 식은??

상대론적 에너지

$$\gamma'_A m_A + \gamma'_B m_B = \gamma'_C m_C + \gamma'_D m_D$$

- 상대론적 질량의 정의 : $\boxed{m(u) \equiv \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$

  - 비상대론적인 경우로의 근사를 하면

$$m(u) = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m\left(1 + \frac{u^2}{2c^2} + \cdots\right) \quad for\, u \ll c$$

$$= m + \frac{1}{2}\frac{mu^2}{c^2} + \cdots$$

$$\therefore m(u)c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \cdots$$

- 상대론적 에너지의 정의 : $\boxed{E \equiv \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$

$\boxed{E_0 = mc^2}$

: 정지 에너지

상대론적 힘과 상대론적 운동에너지

- 상대론적 운동량 : $\vec{p} = \gamma m\vec{u} = \dfrac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

- 상대론적 에너지 : $E = \gamma mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = mc^2 + K$

- 상대론적 힘 : $\vec{F} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ 일정한 힘 $\rightarrow a = |d\vec{u}/dt| \propto \left(1-u^2/c^2\right)^{3/2}$

  • 입자가 상대론적인 조건하에서 일정한 힘을 받으면 그 때 가속도는 점차로 감소하여 속력이 광속에 가까워지면 0에 접근한다. 그러므로 광속 이상으로 가속시키는 것은 불가능하다.

- 상대론적 운동에너지 :$K \equiv (\gamma - 1)mc^2 \ (U = 0) \rightarrow K \approx \dfrac{1}{2}mu^2 \ \ (u \ll c)$

상대론적인 입자의 에너지-운동량 관계식

- 상대론적 운동량의 정의 : $\vec{p} \equiv \gamma m\vec{u} = \dfrac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

- 상대론적 에너지의 정의 : $E \equiv \gamma mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-u^2/c^2}, \quad p^2 = \frac{m^2u^2}{1-u^2/c^2}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$: 에너지-운동량 관계식

- 질량이 0인 광자 또는 중력자 등등의 경우 $E = pc$