

# 공업수학1 (000304)

- Linear Algebra : Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems -

---

2011. 5. 6 (금)

김 경 민

(kimkm@yonsei.ac.kr)



# Ch. 7 선형대수학: 행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

## (Linear Algebra : Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems)

- 선형연립방정식은 전기회로, 기계 구조물, 경제모델, 최적화 문제, 미분방정식의 수치해 등을 다룰 때 나타남
- 선형연립방정식의 문제를 해결하는데, 행렬과 벡터 이용
- 내용 : 행렬 및 벡터 간의 연산에 대한 정의, 선형연립방정식에 관한 것(Gauss 소거법, 행렬의 계수의 역할), 역행렬, 행렬식의 정의와 응용



## 7.1 행렬, 벡터: 합과 스칼라곱 (Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication)

- 행렬 (Matrix) : 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - 원소 (Entry) 또는 요소 (Element): 행렬에 배열되는 수(혹은 함수)
  - 행 (Row) : 수평선
  - 열 (Column) : 수직선
- 벡터 (Vector) : 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬
  - 행벡터 (Row Vector) : 하나의 행으로 구성
  - 열벡터 (Column Vector) : 하나의 열로 구성



- 일반적인 표기법과 개념

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : m \times n \text{ 행렬}$$

- 행렬은 굵은 대문자로 나타낸다
- 첫 번째 아래 첨자  $j$ 는 행(Row)
- 두 번째 아래 첨자  $k$ 는 열(Column)
- $a_{jk}$ :  $j$ 행,  $k$ 열의 원소(Element)
- 정방행렬 (Square Matrix)
  - $m = n$ 이라면  $\mathbf{A}$ 는 정사각형 모양이다
  - 정방행렬에서 원소  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 을 포함하는 대각선을 행렬  $\mathbf{A}$ 의 주대각선 (Principal Diagonal)이라고 한다



● 벡터 (Vectors) : 하나의 행(열)으로 이루어진  $1 \times n$  ( $m \times 1$ )행렬

■ Ex.  $n$  차원 행벡터 (Row Vector) :  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$

$m$  차원 열벡터 (Column Vector) :  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$



- 행렬의 상등 (Equality of Matrices)

: 행렬의 크기가 같으며 대응되는 원소들이 모두 같은 경우

- 행렬의 가법 (Matrix Addition)

: 같은 크기의 행렬에 대해서만 정의되고, 그 합은 대응하는 원소를 각각 합함으로 얻어진다.

- 스칼라곱 (Scalar Multiplication)

: 행렬의 각 원소에 상수를 곱하여 얻어진다.

- 행렬의 가법과 스칼라곱에 대한 연산법칙

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$(c + k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$



## 7.2 행렬의 곱 (Matrix Multiplication)

- 행렬과 행렬의 곱 (Matrix Multiplication)

:  $r \times p$  행렬  $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ 의 행수  $r$ 와  $m \times n$  행렬  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 의 열수  $n$ 가 서로 같아야 정의되며  $c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$ 를 원소로 하는  $m \times p$  행렬로 정의된다.

❖  $\mathbf{AB}$ 는 정의되지만  $\mathbf{BA}$ 는 정의되지 않을 수 있다

- 행렬의 곱은 비가환적 (Not Commutative)이다.  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

- 행렬의 곱에 대한 연산법칙

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{결합법칙 (Associative Law)})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \quad (\text{분배법칙 (Distributive Law)})$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \quad (\text{분배법칙 (Distributive Law)})$$



## ■ Matrix Multiplication

임의의 행렬  $\mathbf{A}$  에 스칼라곱을 구할 수 있음.

두 행렬의 곱은 다음과 같이 정의함.

### Matrix Multiplication

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix} \\
 &= \left( \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times n}.
 \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_{m \times p} \mathbf{B}_{p \times n} = \mathbf{C}_{m \times n}$ . ( $\mathbf{A}$ 의 열의 수  $p$ 와  $\mathbf{B}$ 의 행의 수  $p$ 가 같을 때만 곱이 정의됨.)





### Example Matrix Multiplication

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Solution

$$(a) \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 9 + 7 \cdot 6 & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 8 \\ 3 \cdot 9 + 5 \cdot 6 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 48 \\ 57 & 34 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4) + 8 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ -4 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(a) \text{에서 } \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 30 & 53 \\ 48 & 82 \end{pmatrix}, \text{ 일반적으로 } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

(b)에서는  $\mathbf{BA}$  는 정의되지 않음.





### ■ Matrix Multiplication

$m \times n$  행렬과  $n \times 1$  열벡터와의 곱은  $m \times 1$ 의 열벡터가 됨.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

### ■ Associative Law

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

### ■ Distributive Law

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$



● 행렬과 벡터의 전치 (Transposition of Matrices)

: 열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 행렬.

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] \Rightarrow \mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ 정방행렬에 대한 전치는 주대각선에 관하여 대칭으로 위치한 원소들을 서로 바꾼 것이다.

● 전치 연산에 대한 법칙

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
  

$$\mathbf{B} = (5 \ 3) \rightarrow \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

유한개의 행렬의 합과 곱에도 적용됨.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T \text{ and } (\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$



- 특수한 행렬 (Special Matrices)
- 대칭행렬 (Symmetric Matrix) : 전치가 본래의 행렬과 같은 정방행렬 ( $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ )
- 반대칭행렬 (Skew-symmetric Matrix)  
: 전치가 본래의 행렬의 음이 되는 정방행렬 ( $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ )

$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  이면  $m \times n$  행렬  $\mathbf{A}$  는 대칭적 (Symmetric)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$



- 특수한 행렬 (Special Matrices)
- 삼각행렬 (Triangular Matrix)
  - 위삼각행렬 (Upper Triangular Matrix)
    - : 주대각선을 포함하여 그 위쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
  - 아래삼각행렬 (Lower Triangular Matrix)
    - : 주대각선을 포함하여 그 아래쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬

Upper Triangular Matrix :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lower Triangular Matrix :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 15 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



- 대각행렬 (Diagonal Matrix)
  - : 주대각선 상에서만 0이 아닌 원소를 가질 수 있는 정방행렬
- 스칼라 행렬 (Scalar Matrix) : 주대각선 원소들이 모두 같은 대각행렬
- 단위행렬 (Unit 또는 Identity Matrix) : 주대각선 원소들이 모두 1인 대각행렬

Diagonal Matrix (대각행렬): 
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

대각행렬  $A$ 의 원소  $a_{ii}$ 가 모두 같으면: **스칼라 행렬 (Scalar Matrix)**. 예:  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

주대각 원소가 모두 1인 스칼라행렬: 단위행렬 (**Identity Matrix**)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

표현기호:  $I, E, 1, I_n, I$

성질:  $m \times n$  행렬  $A$ 에 대해  $I_m A_{m \times n} = A_{m \times n} I_n = A$



## 7.3 선형연립방정식, Gauss 소거법 (Linear Systems of Equations. Gauss Elimination)

- 선형연립방정식, 계수행렬, 첨가행렬
- 선형연립방정식 :

$$\begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \dots\dots\dots \\
 a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_n
 \end{bmatrix}$$

- 제차연립방정식 (Homogeneous Simultaneous System)  
:  $b_j$ 가 모두 0인 경우

This system is homogeneous ↓

$$\begin{array}{l}
 5x_1 - 9x_2 + x_3 = 0 \\
 x_1 + 3x_2 = 0 \\
 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 0
 \end{array}$$

- 비제차연립방정식 (Nonhomogeneous Simultaneous System)  
:  $b_j$  중 적어도 하나는 0이 아닌 경우

This system is nonhomogeneous ↓

$$\begin{array}{l}
 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1 \\
 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 9
 \end{array}$$



- 선형연립방정식의 행렬표현 :  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- 계수행렬 (Coefficient Matrix) :  $\mathbf{A}$
- 해벡터 (Solution Vector) :  $\mathbf{x}$
- 첨가행렬 (Augmented matrix) : 계수행렬  $\mathbf{A}$ 에 열벡터  $\mathbf{b}$ 를 첨가한 행렬

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_n \end{bmatrix}$$



### Example

#### ■ Augmented Matrix (첨가행렬)

$$2x + 6y + z = 7 \qquad 2u + 6v + w = 7$$

$$x + 2y - z = -1 \qquad u + 2v - w = -1$$

$$5x + 7y - 4z = 9. \qquad 5u + 7v - 4w = 9$$

→ 두 방정 식의 해는 동일함 (사용 문자에 무관)

문자는 떼어버리고 계수와 상수만을 사용하여 행렬을 구성함

→ 첨가행렬 (Augmented Matrix)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$





### Example Solving a Linear System

다음 연립방정식을 푸시오

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$

$$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 9.$$

### Solution

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 9. \end{array} \xrightarrow{R_{12}} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 9. \end{array} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 9. \end{array}$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_3} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -3x_2 - x_3 = 14. \end{array}$$





$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{9}{2} \\ -3x_2 - x_3 = 14. \end{array} \xrightarrow{(1/2)R_2} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{9}{2} \\ -3x_2 - x_3 = 14. \end{array} \xrightarrow{-2R_2 + R_1} \begin{array}{l} x_1 - 4x_3 = -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{9}{2} \\ -3x_2 + x_3 = 14. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 4x_3 = -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2}x_3 = \frac{55}{2}. \end{array} \xrightarrow{3R_2 + R_3} \begin{array}{l} x_1 - 4x_3 = -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2}x_3 = \frac{55}{2}. \end{array} \xrightarrow{(2/11)R_3} \begin{array}{l} x_1 - 4x_3 = -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{9}{2} \\ x_3 = 5. \end{array}$$

여기서부터는 역대입법이라 부른다.

$$\begin{array}{l} x_1 - 4x_3 = -10 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5. \end{array} \xrightarrow{(-3/2)R_3 + R_2} \begin{array}{l} x_1 - 4x_3 = -10 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5. \end{array} \xrightarrow{4R_3 + R_1} \begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5. \end{array}$$

연립방정식의 해:  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 5$  이다.





## ■ Elimination Methods

**Gaussian Elimination (가우스 소거법): Row-echelon Form (행사다리꼴)** 형태로 변환한다.

- 0 행이 아닌 행에 있어 처음으로 0 이 아닌 원소는 1 이다.
- 연속하는 0 이 아닌 행에서 아래 행의 첫 번째 원소 1 이 위의 행에 있는 1 보다 오른쪽에 나온다.
- 모두 0 만으로 된 행들은 그 행렬의 맨 아래에 있다.

다음 행렬은 모두 Row-echelon Form (행사다리꼴)이다.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{and} \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

**Gauss-Jordan Elimination: Reduced row-echelon Form (기약행사다리꼴)**

위에 열거한 Row-echelon Form (행사다리꼴)의 특성에 추가하여

- 첫 원소 1 을 포함하는 열의 다른 원소는 모두 0 이다.

다음 행렬은 모두 Reduced Row-echelon Form (기약행사다리꼴)이다.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{and} \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$



● 가우스 소거법과 후치환 (Gauss Elimination and Back Substitution)

연립방정식	첨가행렬
$2x_1 + 5x_2 = 2$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}$
$-4x_1 + 3x_2 = -30$	

**Step 1**  $x_1$ 을 소거 : 첫 번째 식에 두 배 한 후, 이를 두 번째 식에 더한다.

$2x_1 + 5x_2 = 2$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix}$
$13x_2 = -26$	

**Step 2** 후치환 (Back Substitution)을 통해  $x_2, x_1$  순으로 해를 구한다.

마지막 방정식에서  $x_2 = -26/13 = -2$ 를 구한 후, 그 결과를 역순으로 첫째 방정식에 대입하

여  $x_1$ 에 대하여 정리하면,  $x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_2) = \frac{1}{2}(2 - 5(-2)) = 6$ 을 얻는다.



● 기본행연산. 행동치 연립방정식 (Elementary Row Operations. Row-Equivalent Systems)

<방정식에 대한 기본연산>	↔	<행렬에 대한 기본행연산>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 두 방정식을 교환하는 것</li> <li>• 한 방정식의 상수배를 다른 방정식에 더하는 것</li> <li>• 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• 두 행을 교환하는 것</li> <li>• 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것</li> <li>• 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 것</li> </ul>

❖ 기본 행연산을 이용하여 미지수를 하나씩 소거하여 대각선 아래의 계수를 0으로 만든다

● 행동치 (Row-Equivalent)

: 선형시스템  $S_1$ 이 선형시스템  $S_2$ 에 유한번의 기본행연산을 가하여 얻어질 수 있다면  $S_1$ 을  $S_2$ 의 **행동치**라 한다.

● 행동치 연립방정식 (Row-Equivalent Systems)

: 행동치 연립방정식들은 같은 해집합을 갖는다.



- Gauss 소거법 : 연립방정식의 세가지 경우
  - 무한히 많은 해가 존재하는 경우(미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)
  - 유일한 해가 존재하는 경우
  - 해가 존재하지 않는 경우(연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)



■ **Ex.3** 4개의 미지수를 갖는 3개의 선형연립방정식, 그리고 이에 대응하는 아래의 첨가행렬을 가진 연립방정식의 해를 구하라.

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & \vdots & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & \vdots & 2.1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned}$$

**Step 1**  $x_1$ 을 소거

첫째 방정식에  $-0.6/3.0 = -0.2$  배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에  $-1.2/3.0 = -0.4$  배 하여 세 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & \vdots & -1.1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + (-0.2) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-0.4) \times 1\text{행} \end{array} \quad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned}$$

**Step 2**  $x_2$ 을 소거 : 두번째 방정식에  $1.1/1.1 = 1$  배 하여 세 번째 방정식에 더하라

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3\text{행} + 2\text{행} \end{array} \quad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

**Step 3** 후치환  $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$ ,  $x_1 = 2 - x_4$

$x_3$ 와  $x_4$ 는 임의로 결정할 수 있는 수이므로, 무한히 많은 해가 얻어진다.



■ **Ex.4** Gauss 소거법을 해가 존재하지 않는 연립방정식에 적용

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & 4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

**Step 1**  $x_1$ 을 소거

첫째 방정식에  $-\frac{2}{3}$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에  $-\frac{6}{3} = -2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2\text{행} + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-2) \times 1\text{행} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Step 2**  $x_2$ 을 소거 : 세 번째 식에서  $x_2$ 를 소거

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 12 \end{bmatrix} 3\text{행} + (-6) \times 2\text{행}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned}$$

모순이 되어 연립방정식은 해를 갖지 않는다.



## 7.4 일차 독립. 행렬의 계수. 벡터공간 (Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space)

- 벡터의 일차 독립과 종속성

$$c_1 \mathbf{a}_{(1)} + c_2 \mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m \mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라}, \mathbf{a}: \text{벡터})$$

- 일차 독립 (Linearly Independent) : 모든  $c_j = 0$  일 때만 위 식이 만족
- 일차 종속 (Linearly Dependent) : 어떤  $c_j \neq 0$  이어도 위 식이 만족



- **행렬의 계수(Rank)** : 행렬에서 1차독립인 행벡터의 최대 수이며  $\text{rank}(\mathbf{A})$ 라 표시
  - **행동치인 행렬**  
행동치인 행렬들은 같은 계수를 갖는다.
  - **일차종속성과 일차독립성**  
각각  $n$ 개의 성분을 갖는  $p$ 개의 벡터들은 이 벡터들을 행벡터로 취하여 구성된 행렬의 계수가  $p$ 이면 일차독립이고, 그 계수가  $p$ 보다 작으면 일차종속이다.
  - **열벡터에 의한 계수**  
행렬의 계수는 행렬의 일차독립인 열벡터의 최대수와 같다.  
⇒ 행렬과 행렬의 전치는 같은 계수를 갖는다.
  - **벡터의 일차종속**  
 $n(< p)$ 개의 성분을 갖는  $p$ 개의 벡터들은 항상 일차종속이다.



- 벡터공간 (Vector Space)

: 공집합이 아닌 벡터의 집합에 속해 있는 임의의 두 원소에 대하여, 이들의 일차결합이 다시 집합의 원소가 되며 다음 법칙을 만족하는 벡터들의 집합

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$(c + k)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$c(k\mathbf{A}) = (ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- 차원 (Dimension): 벡터공간내의 일차독립인 벡터들의 최대수이며  $\dim(V)$ 로 표기

- 기저 (Basis)

: 벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 부분집합이며 기저가 되는 벡터의 수는 차원과 같다.

- 생성공간 (Span)

: 성분의 수가 같은 벡터들에 관한 일차결합으로 표현되는 모든 벡터들의 집합

- 부분공간 (Subspace)

: 벡터공간에서 정의된 벡터합과 스칼라곱에 관하여 닫혀있는 부분집합



- $\mathbf{R}^n$  벡터공간

$n$ 개의 성분을 갖는 모든 벡터들로 이루어진 벡터공간  $\mathbf{R}^n$ 의 차원  $n$ 이다.

- 행공간(Row Space) : 행벡터들의 생성공간

- 열공간(Column Space) : 열벡터들의 생성공간

- 행공간과 열공간

행렬의 행공간과 열공간은 차원이 같고, 행렬의 계수와도 동일하다.

- 영공간(Null Space) :  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 의 해집합

- 퇴화차수(Nullity) : 영공간의 차원

$$\mathbf{A} \text{의 계수} + \mathbf{A} \text{의 퇴화차수} = \mathbf{A} \text{의 행계수}$$



## 7.5 선형연립방정식의 해 : 존재성, 유일성 (Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness)

### ● 선형연립방정식에 대한 기본정리

#### • 존재성 (Existence)

: 선형연립방정식이 **모순이 없기 위한 (Consistent)**, 다시 말해서 해를 갖기 위한, 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

#### • 유일성 (Uniqueness)

: 선형연립방정식이 **유일한 해를 갖기 위한 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.**

#### • 무수히 많은 해 (Infinitely Many Solutions)

: 계수행렬의 계수가 미지수의 개수보다 작으면 무수히 많은 해가 존재

#### • Gauss 소거법 (Gauss Elimination)

: 해가 존재하면 Gauss 소거법에 의해 모두 구해질 수 있다.



● 제차연립방정식

- 제차연립방정식은 항상 자명한 해(Trivial Solution)을 갖는다.

계수행렬의 계수 =  $r$ , 미지수의 갯수 =  $n$ 라 하자.

- 자명하지 않은 해가 존재할 필요충분조건 :  $r < n$
- $r < n$ 이면 해공간은  $n - r$  차원 벡터공간이다.
- 제차연립방정식의 두 해벡터의 일차결합도 제차연립방정식의 해이다.

● 미지수보다 방정식의 수가 적은 제차 선형연립방정식

방정식의 수가 미지수의 수보다 적은 제차연립방정식은 항상 자명하지 않은 해 (Nontrivial Solution)를 갖는다.

● 비제차연립방정식

만약 비제차 연립방정식이 해를 갖는다면 모든 해는  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$  와 같은 형태가 된다.  $\mathbf{x}_0$ 은 고정된 임의의 해이고  $\mathbf{x}_h$ 는 대응하는 제차연립방정식의 모든 해를 대표한다.



## Using the Inverse to Solve Systems

$n$  개의 미지수  $x_1, x_2, \dots, x_n$  에 관한  $m$  개의 연립방정식은,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

이 식은 행렬방정식  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  로 쓸 수 있다. 여기서

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$



## ■ Special Case

계수행렬  $\mathbf{A}$  가  $n \times n$ 이고,  $\mathbf{A}$  가 Nonsingular 행렬이면 양변에  $\mathbf{A}^{-1}$  을 곱하면

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

### *Example* Solve a System

계수행렬의 역행렬을 이용하여 다음 방정식을 푸시오.

$$2x_1 - 9x_2 = 15$$

$$3x_1 + 6x_2 = 16$$



**Example** Solve a System

계수행렬의 역행렬을 이용하여 다음 방정식을 푸시오.

$$2x_1 + \quad x_3 = 2$$

$$5x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -1$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4.$$



## 7.6 참고사항 : 2차 및 3차 행렬식 (For Refernece : Second- and Third-Order Determinants)

- 2차 행렬식 (Determinant of Second Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 선형연립방정식

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{Cramer의 법칙} \\ D \neq 0}]{\hspace{1cm}} \begin{array}{l} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D} \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{array}$$



- 3차 행렬식 (Determinant of Third Order)

$$\begin{aligned}
 D = \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}
 \end{aligned}$$

- 선형연립방정식

$$\begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
 \end{array}
 \xrightarrow[\substack{\text{Cramer의 법칙} \\ D \neq 0}]{\hspace{1cm}}
 x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$



*Example 1* Cofactor Expansion Along the First Row

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{일 때 } \det \mathbf{A} \text{ 구하기}$$



*Example 2 Cofactor Expansion Along the Third Column*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ 일 때 } \det \mathbf{A} \text{ 구하기}$$



여인수 전개를 이용하여 행렬식을 구하는 방법은  $n \times n$  행렬로 확장할 수 있다.

**Cofactor Expansion of a Determinant**

$A = (a_{ij})_{n \times n}$  이  $n \times n$  행렬일 때,

$A$  의  $i$ -행에 따른  $\det A$  의 Cofactor 전개는:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

$A$  의  $j$ -열에 따른  $\det A$  의 Cofactor 전개는:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

부호는 다음 표에 따른다.

		+	-	+	-	+	...
		-	+	-	+	-	...
+	-	+	-				
-	+	-	+				
+	-	+	-				
-	+	-	+				
4 × 4 matrix		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
		$n \times n$ matrix					



**Example 3 Cofactor Expansion Along the Fourth Row**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ 일 때 } \det \mathbf{A} \text{ 구하기}$$



## 7.7 행렬식. Cramer의 법칙 (Determinants. Cramer's Rule)

- $n$ 차 행렬식 (Determinant of Third Order)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$n=1 \text{이면 } D = a_{11}$$

$$n \geq 2 \text{ 이면 } D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{또는 } D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}, \quad M_{jk} \text{ 는 } n-1 \text{ 차의 행렬식}$$

- 소행렬식 (Minor) :  $M_{jk}$
- 여인수 (Cofactor) :  $C_{jk}$



● 기본행연산항 (Elementary Row Operation)에서의  $n$ 차 행렬식의 양태

- 두 행을 바꾸는 것은 행렬식의 값에  $-1$ 을 곱하는 것이다.
- 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
- 한 행에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.

● 추가적인  $n$ 차 행렬식의 성질

- 두 열을 바꾸는 것은 행렬식의 값에  $-1$ 을 곱하는 것이다.
- 한 열의 상수배를 다른 열에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
- 한 열에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.
- 전치 (Transposition)는 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
- 0행 또는 0열은 행렬식의 값을  $0$ 으로 만든다.
- 같은 비율의 행 또는 열은 행렬식의 값을  $0$ 으로 만든다.



● 행렬식에 의한 계수

$m \times n$  행렬  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$  가 계수  $r (\geq 1)$  을 갖기 위한 필요충분조건은  $\mathbf{A}$  의  $r \times r$  부분행렬의 행렬식은 0이 되지 않는 반면,  $\mathbf{A}$  의  $(r+1) \times (r+1)$  또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방 부분행렬의 행렬식은 0이 되는 것이다. 특히,  $\mathbf{A}$  가 정방행렬  $n \times n$  일 때, 계수가  $n$  일 필요충분조건은  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  이다.

● Cramer의 정리(행렬식에 의한 선형연립방정식의 해)

$$\begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \dots\dots\dots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
 \end{array}
 \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}}
 x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

$D_k$ 는  $D$ 의  $k$ 번째 열을  $b_1, \dots, b_n$ 인 원소로 갖는 열로 대치하여 얻은 행렬식



### Cramer's Rule

$\det \mathbf{A} \neq 0$  이면  $n \times n$  시스템 (4)의 해는

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}},$$

### Proof

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$x_k = \frac{b_1 C_{1k} + b_2 C_{2k} + \cdots + b_n C_{nk}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_k}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{분자는 } k\text{-열에 따라 전개한 } \det \mathbf{A}_k \text{의 여인수 전개})$$





**Example** Using Cramer's Rule to Solve a System

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$

$$5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1.$$



## 7.8 역행렬 . Gauss-Jordan 소거법 (Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination)

- 역행렬 (Inverse Matrix)

$$\mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A} = [a_{jk}] \text{의 역행렬} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- 정칙행렬 (Nonsingular Matrix) : 역행렬을 갖는 경우
- 특이행렬 (Singular Matrix) : 역행렬을 갖지 않는 경우
- 역행렬을 가지면 그 역행렬은 유일하다.

- 역행렬의 존재성

$$\mathbf{A} \text{가 } n \times n \text{행렬일 때, 역행렬 } \mathbf{A}^{-1} \text{이 존재} \Leftrightarrow \text{rank}(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{는 정칙행렬}$$

$$\text{rank}(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{는 특이행렬}$$



● 역행렬에 대한 유용한 식

$$n \times n \text{ 행렬 } \mathbf{A} = [a_{jk}] \text{의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [\mathbf{C}_{jk}] = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}_{jk}$  는  $\det \mathbf{A}$ 에서  $a_{jk}$ 의 여인수

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

■ Ex.3  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det \mathbf{A} = -1(-7) - 1 \cdot 13 + 2 \cdot 8 = 10, \quad \mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \quad \mathbf{C}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{C}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \quad \mathbf{C}_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \mathbf{C}_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad \mathbf{C}_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{C}_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$



### Finding the Inverse

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{인 경우}$$

$$C_{11} = a_{22}, \quad C_{12} = -a_{21}, \quad C_{21} = -a_{12}, \quad C_{22} = a_{11}$$

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{인 경우}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{등등이다.}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$





**Example** Inverse of a Matrix

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.



**Example** Inverse of a Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{의 역행렬을 구하라.}$$



● Gauss-Jordan 소거법에 의한 역행렬의 결정

$n \times n$  행렬  $A$ 의 역행렬  $A^{-1}$ 을 결정하기 위한 방법

$$\tilde{A} = [A \ : \ I] \xrightarrow{\text{Gauss 소거법}} [I \ : \ K] \Rightarrow \therefore A^{-1} = K$$

■ Ex.1  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 [A \ : \ I] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2\text{행} + 3 \times 1\text{행} \\ 3\text{행} - 1\text{행} \end{array} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 3\text{행} - 2\text{행} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & \vdots & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -1\text{행} \\ 0.5 \times 2\text{행} \\ -0.2 \times 3\text{행} \end{array} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1\text{행} + 2 \times 3\text{행} \\ 2\text{행} - 3.5 \times 3\text{행} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1\text{행} + 2\text{행} \\ \\ \end{array}
 \end{aligned}$$



**Example** Inverse by Elementary row Operations

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{의 역행렬을 구하라}$$



- 대각행렬의 역행렬

대각행렬  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 의 역행렬이 존재  $\Leftrightarrow a_{jj} \neq 0 (j=1, 2, \dots, n)$

$\mathbf{A}^{-1}$ 은  $1/a_{11}, \dots, 1/a_{nn}$  이 대각원소인 행렬

■ Ex.4  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 두 행렬의 곱:  $(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$   
 $(\mathbf{AC} \cdots \mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1} \cdots \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- 역행렬의 역행렬:  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$



- 행렬의 곱에 대한 특이 성질. 약분법

- 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않는다.  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$  (일반적으로 성립하지 않는다.)
- $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  일 때  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  또는  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  이 아닐 수도 있다.

• 예) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$  일 때  $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$  일 수도 있다(심지어  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  일 때에도).

- 약분법칙

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 를  $n \times n$ 행렬이라 하자.

- $\text{rank } \mathbf{A} = n$  이고  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$  이면,  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$  이다.
- $\text{rank } \mathbf{A} = n$  이면  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  은  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  을 의미한다.  
 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  이면서  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  이고  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  이면  $\text{rank } \mathbf{A} < n$  이고  $\text{rank } \mathbf{B} < n$
- $\mathbf{A}$  가 특이행렬이면  $\mathbf{AB}$  와  $\mathbf{BA}$  도 또한 특이행렬이다.
- 행렬곱의 행렬식 :  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$



## 7.9 벡터공간, 내적공간, 일차변환 (Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations)

### ● 실벡터공간(Real Vector Space)

#### • 벡터의 덧셈 : $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

가환성(Commutativity)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
결합성(Associativity)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
영벡터(Zero Vector)	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

#### • 스칼라곱 : $k\mathbf{a}$

분배성(Distributivity)	$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
분배성(Distributivity)	$(c + k)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + k\mathbf{a}$
결합성(Associativity)	$c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a}$
	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$





- 실내적공간(Real Inner Product Space)

내적(Inner Product) :  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

1. 선형성  $(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q_1(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + q_2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$
2. 대칭성  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
3. 양의 정치성  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0,$   
 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ 일 필요충분조건은  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

- 직교(Orthogonal) : 내적이 영인 두 벡터
- 벡터의 길이 또는 노름(Norm) :  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$
- 단위벡터(Unit Vector) : 길이가 1인 벡터

- 기본부등식

- Cauchy - Schwarz 부등식 :  $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$
- 삼각부등식 :  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
- 평행사변형 등식 :  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$



● 일차변환(Linear Transformations)

- $X$ 에서  $Y$ 로의 사상(Mapping) 또는 변환(Transformation) 또는 연산자(Operator)

: 공간  $X$  의 벡터  $\mathbf{x}$ 에 대하여 공간  $Y$ 의 유일한 벡터  $\mathbf{y}$ 를 대응

- $F$ 를 선형사상(Linear Mapping) 또는 일차변환(Linear Transformation)

:  $X$ 의 임의의 벡터  $\mathbf{v}, \mathbf{x}$ 와 임의의 스칼라  $c$ 에 대하여

$$* F(\mathbf{v} + \mathbf{x}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x})$$

$$* F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$$

를 만족

- $\mathbf{R}^n$  공간에서  $\mathbf{R}^m$  공간으로의 일차변환.

- $\mathbf{R}^n$ 에서  $\mathbf{R}^m$ 으로의 일차변환은 선형이다.

- $\mathbf{R}^n$ 에서  $\mathbf{R}^m$ 으로의 일차변환  $F$ 는  $m \times n$ 행렬  $\mathbf{A}$ 에 의해 주어진다.



## ※ 숙제(Homework)

- 한글판: pp. 401-402 복습문제
- 영문판: pp. 330-331 Review Questions and Problems
  - ✓ 1~10 번 문제 중 1문제 선택 후 풀이
  - ✓ 11~19 번 문제 중 1문제 선택 후 풀이
  - ✓ 20~30 번 문제 중 1문제 선택 후 풀이
  - ✓ 31~45 번 문제 중 1문제 선택 후 풀이

- ❖ 문제가 어려워서 문제를 못 풀 경우, “해결하지 못 했음.”으로 표기하시오.
  - 단, 문제를 해결하기 위해 노력한 흔적을 제출하시오.
  - 숙제 중 정답 여부는 점수에 넣지 않으나, 노력한 흔적이 없을 시 감점 처리.
  - 오답을 Copy(다른 사람과 풀이과정이 같은 경우로 판단)하였을 경우도 감점\*2 처리.



❖ **Material Download:**

- <http://blog.daum.net/kimkm79>
  - 강의자료 Click!
  - 카테고리#LECTURES#Adv. Eng. Math. Click!

❖ **연락처: 010-8237-1563 (C.P.)**

❖ **e-mail:**

- [kimkm@yonsei.ac.kr](mailto:kimkm@yonsei.ac.kr);
- [kimkm79@gmail.com](mailto:kimkm79@gmail.com)