

[SN066] 이산수학(2)

- 명제와 논리 (3) -

1장. 명제와 논리

1.1 논리식과 논리적 동치

1.2 조건명제

1.3 정당한 논증과 부당한 논증

1.4 응용: 디지털 논리회로

1.5 응용: 수 체계와 덧셈회로

1.3 정당한 논증과 부당한 논증 (Valid and Invalid Arguments)

✓ 논증의 추상화

- 만일 소크라테스가 사람이라면 소크라테스는 죽는다.
- 소크라테스는 사람이다.
- ∴ 소크라테스는 죽는다.

If p then q

p

∴ q

논증과 논증식

✓ 정의

- **논증**(argument)은 명제들의 나열이고, **논증식**(argument form)은 명제식들의 나열이다. 논증과 논증식에서 제일 마지막 것만 제외한 명제와 명제식을 **전제**(premise) 또는 **가정**(assumption) 또는 **가설**(hypothesis)라 하고, 마지막 명제 또는 명제식은 **결론**(conclusion)이라 한다. 기호 $\therefore$ 는 ‘그러므로’라고 읽고 결론 바로 앞에 표시한다.
- 논증식이 **정당(유효)하다**(valid)는 것은 전제 부분의 명제변수가 어떤 명제로 대체되더라도 전제가 모두 참일 때는 결론도 역시 참이 된다는 것을 의미한다. 논증이 **정당(유효)하다**는 것은 그것의 논증식이 정당(유효)하다는 것을 의미한다.

논증식의 정당성(유효성) 검사

✓ 진리표를 사용

✓ 예제: **부당한(유효하지 않은)** 논증식

$$\begin{aligned} p &\rightarrow q \vee \sim r \\ q &\rightarrow p \wedge r \\ \therefore p &\rightarrow r \end{aligned}$$

p	q	r	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$p \wedge r$	$p \rightarrow q \vee \sim r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

논증식의 정당성(유효성) 검사

✓ 예제: 정당한(유효한) 논증식

$$\begin{array}{l}
 p \vee (q \vee r) \\
 \sim r \\
 \therefore p \vee q
 \end{array}$$

p	q	r	$\sim r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\sim r$	$p \vee q$
T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F	T	F

긍정논법과 부정논법

✓ 삼단논법(syllogism)

- 두 개의 전제와 하나의 결론으로 이루어진 논증식
- 널리 쓰이는 정당한 삼단논법:
 - 긍정논법(modus ponens)
 - 부정논법(modus tollens)

If p then q
 p
 $\therefore q$

p	q	$p \rightarrow q$	q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

If p then q
 $\sim q$
 $\therefore \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

긍정논법과 부정논법 예제

- ✓ 예제: ()논법
 - 비둘기 구멍보다 비둘기가 더 많다면, 비둘기 두 마리가 같은 구멍에 앉는다.
 - 비둘기 구멍보다 비둘기가 더 많다.
 - ∴ _____.

- ✓ 예제: ()논법
 - 만일 제우스가 사람이면, 제우스는 죽는다.
 - 제우스는 죽지 않는다.
 - ∴ _____.

- ✓ 예제: ()논법
 - 주소가 확실하지 않다면, 전화를 건다.
 - _____.
 - ∴ 주소가 확실하다.

추가적인 정당한 논증식: 추론규칙

✓ 일반화

$$p$$
$$\therefore p \vee q$$

✓ 예제: 상급생의 판단

앤튼은 3학년이다.

$\therefore$ 앤튼은 3학년 또는 4학년이다.

추가적인 정당한 논증식: 추론규칙

✓ 특수화

$$p \wedge q$$

$$\therefore p$$

✓ 예제: 프로젝트 인원 보충

애나는 재고이론을 공부했고 애나는 일정계획을 공부했다.

$\therefore$ 애나는 일정계획을 공부했다.

추가적인 정당한 논증식: 추론규칙

✓ 소거

$$p \vee q$$

$$\sim q$$

$$\therefore p$$

✓ 예제

비가 오거나 눈이 온다.

눈이 오지 않는다.

$\therefore$ 비가 온다.

추가적인 정당한 논증식: 추론규칙

✓ 추이

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

✓ 예제

18,486이 18로 나누어지면, 18,486은 9로 나누어진다.

18,486이 9로 나누어지면, 18,486을 구성하는 숫자들의 합은 9로 나누어진다.

$\therefore$ 18,486이 18로 나누어지면, 18,486을 구성하는 숫자들의 합은 9로 나누어진다.

추가적인 정당한 논증식: 추론규칙

✓ 사례분할에 의한 증명법

$$p \vee q$$

$$p \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore r$$

$$* p \vee q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

✓ 예 제

x 는 양수이거나 또는 x 는 음수이다.

x 가 양수이면 $x^2 > 0$ 이다.

x 가 음수이면 $x^2 > 0$ 이다.

$$\therefore x^2 > 0$$

모순과 정당한 논증

✓ 모순규칙

- 명제 p 가 거짓이라고 가정했을 때 논리적으로 모순이 되면 p 가 참이라고 결론을 내림
- 모순에 의한 증명방법의 핵심

✓ 논증식(c 는 모순명제)

- $\sim p \rightarrow c$
 $\therefore p$

p	$\sim p$	c	$\sim p \rightarrow c$	p
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F

연습문제

✓ 다음의 논증식이 정당한지 밝혀라.

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow p$$

$$\therefore p \vee q$$

$$p$$

$$p \rightarrow q$$

$$\sim q \vee r$$

$$\therefore r$$

$$p \wedge q \rightarrow \sim r$$

$$p \vee \sim q$$

$$\sim q \rightarrow p$$

$$\therefore r$$

✓ 다음 논증의 정당성을 밝혀라.

- 영희가 A팀에 속하지 않으면, 철수는 B팀에 속한다.

철수가 B팀에 속하지 않으면, 영희는 A팀에 속한다.

$\therefore$ 영희는 A팀에 속하지 않거나, 철수는 B팀에 속하지 않는다.

- 톰의 전공은 수학이거나 경제학이다.

톰의 전공이 수학이면, 톰은 미적분학 과목을 수강해야만 한다.

$\therefore$ 톰의 전공은 경제학이거나 톰은 미적분학 과목을 꼭 수강해야 하는 것은 아니다.

예제 1.3.9 응용: 연역법

✓ 안경은 어디에 있을까?

- a. 내 안경이 식탁 위에 있으면 나는 아침을 먹을 때 안경을 보았다.
- b. 나는 거실에서 신문을 읽고 있었거나 부엌에서 신문을 읽고 있었다.
- c. 내가 거실에서 신문을 읽고 있었다면 내 안경은 커피 탁자 위에 있다.
- d. 아침을 먹을 때 내 안경을 보지 못했다.
- e. 내가 침대에서 책을 읽고 있었다면, 내 안경은 침대 탁자 위에 있다.
- f. 내가 부엌에서 신문을 읽고 있었다면, 내 안경은 식탁 위에 있다.

예제 1.3.9 응용: 연역법

- a. 내 안경이 식탁 위에 있으면 나는 아침을 먹을 때 안경을 보았다.
- b. 나는 거실에서 신문을 읽고 있었거나 부엌에서 신문을 읽고 있었다.
- c. 내가 거실에서 신문을 읽고 있었다면 내 안경은 커피 탁자 위에 있다.
- d. 아침을 먹을 때 내 안경을 보지 못했다.
- e. 내가 침대에서 책을 읽고 있었다면, 내 안경은 침대 탁자 위에 있다.
- f. 내가 부엌에서 신문을 읽고 있었다면, 내 안경은 식탁 위에 있다.

✓ 추론

1. 안경은 식탁 위에 있지 않다.
 - (a), (d)와 부정논법
2. 나는 부엌에서 신문을 읽지 않았다.
 - (f), (1)과 부정논법
3. 나는 거실에서 신문을 읽었다.
 - (b), (2)와 소거
4. 내 안경은 커피 탁자 위에 있다.
 - (c), (3)과 긍정논법

예제 1.3.10 상황의 기호화

✓ 명제

- p = 내 안경은 식탁 위에 있다.
- q = 아침을 먹을 때 안경을 보았다.
- r = 거실에서 신문을 읽고 있었다.
- s = 부엌에서 신문을 읽고 있었다.
- t = 내 안경은 커피 탁자 위에 있다.
- u = 침대에서 책을 읽고 있었다.
- v = 내 안경은 침대 탁자 위에 있다.

✓ 기호화

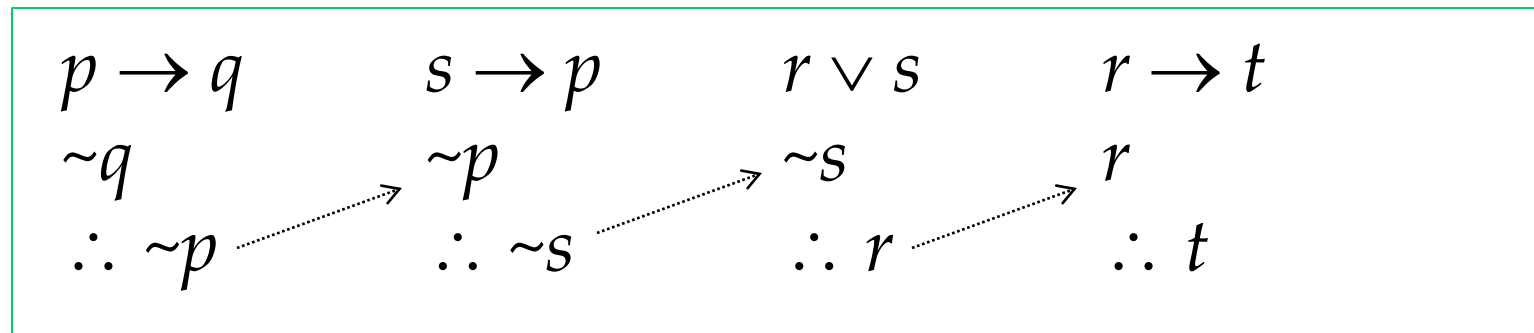
- a. $p \rightarrow q$
- b. $r \vee s$
- c. $r \rightarrow t$
- d. $\sim q$
- e. $u \rightarrow v$
- f. $s \rightarrow p$

예제 1.3.10 상황의 기호화

✓ 전제

- a. $p \rightarrow q$ b. $r \vee s$ c. $r \rightarrow t$
- d. $\sim q$ e. $u \rightarrow v$ f. $s \rightarrow p$

✓ 추론(정당한 논증식을 사용)



예제 1.3.16 기사와 악당 - 모순규칙

- ✓ 진실의 기사들과 거짓말의 악당들이 사는 섬
 - A: B는 기사다.
 - B: A와 나는 서로 반대 유형이다.

- ✓ 추론
 - A를 기사라 가정
 - A는 기사가 아님(모순규칙)
 - A는 악당임(소거)
 - A는 거짓말을 함 → B는 기사가 아님
 - B는 악당임(소거)

논증의 정당성 - 허위

- ✓ 허위: 부당한 논증을 사용하여 추론하는 오류
 - Using ambiguous premises
 - Begging the question
 - Jumping to conclusion
 - Converse error(역오류)
 - 제크가 사기꾼이라면 제크는 뒷줄에 앉는다.
 - 제크는 뒷줄에 앉는다.
 - ∴ 제크는 사기꾼이다.
 - Inverse error(이오류)
 - 이자율이 올라간다면, 주식값은 내려갈 것이다.
 - 이자율이 올라가지 않았다.
 - ∴ 주식값이 내려가지 않는다.

논증의 정당성과 결론의 진위

- ✓ 거짓 결론을 가지는 정당한 논증
 - 만약 존 레논이 록스타였다면 존 레논의 머리는 빨간색이다.
 - 존 레논은 록스타였다.
 - ∴ 존 레논의 머리는 빨간색이다.

- ✓ 결론이 참인 부당한 논증
 - 뉴욕이 큰 도시이면 뉴욕에는 큰 빌딩이 많다.
 - 뉴욕에는 큰 빌딩이 많다.
 - ∴ 뉴욕은 큰 도시이다.

고찰: 정당한 논증

✓ 논증이 정당하다는 것은?

- 논증의 내용에 있는 것이 아니라 형식에 있음
 - 정당한 논증의 결론이 거짓일 수 있음
 - 전제들 중 하나라도 참이 아닌 것이 있을 때 가능함
 - 정당한 논증이라는 것과 결론이 참이라는 것은 관련이 없음
 - 즉, 논의에서 정당한 논증을 사용하였다는 것은, 전제가 모두 참일 때 결론이 참이란 것을 보장받을 수 있다라는 것을 의미함
- * 정당한 논증을 사용하지 않은 글은 학술적인 가치가 없음

연습문제

- ✓ 컴퓨터 프로그램에 대해 다음의 정보가 주어져 있다. 프로그램에서 잘못된 점을 찾으라.
 - a. 선언하지 않은 변수가 있거나 처음 5개 라인에서 구문 오류가 있다.
 - b. 처음 5개 라인에 구문 오류가 있다면, 세미콜론이 빠졌거나 변수 이름이 잘못 쓰여진 것이다.
 - c. 세미콜론이 빠지지 않았다.
 - d. 변수 이름이 잘못 쓰여지지 않았다.
- ✓ 다음 논증이 정당하면 정당성을 보장하는 추론규칙을 확인하고, 정당하지 않으면 어디에서 오류를 범했는지 제시하라.

철수가 이 문제를 맞게 풀었다면 철수는 2를 답으로 구하였다.
철수는 2를 답으로 구하였다.
∴ 철수는 이 문제를 맞게 풀었다.