Quaternion

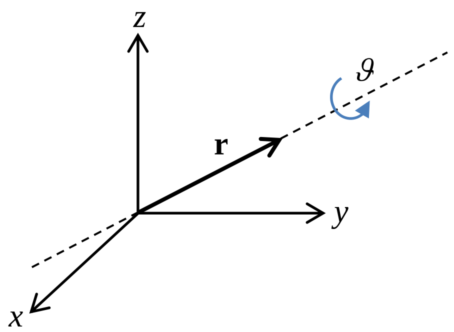
KITECH 양광웅 작성

오일러 각(Euler Angles)의 연산에서 발생하는 각종 문제점들을 극복하기 위해 네 개의 원소로 표현되는 쿼터니언(Quaternion)을 사용한다.

Quaternion

쿼터니언은 3개의 벡터 요소와 하나의 스칼라 요소로 구성된다.

$$q = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\eta,\ \varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z\}$$



상기 그림에서 회전 축이 되는 벡터 $\mathbf{r}$ 와 회전각 ϑ 로 쿼터니언을 다음과 같이 계산한다.

$$\eta = \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\sin\frac{\vartheta}{2}$$

여기서 η 는 쿼터니언의 스칼라 성분이고, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z)$ 는 쿼터니언의 벡터 성분이다.

Unit Quaternion:
쿼터니언의 크기가 1일 때 단위쿼터니언(Unit Quaternion)으로 부른다.

$$q_U = \frac{q}{\|q\|}$$

Product:

쿼터니언의 곱은 두 회전행렬 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 의 곱 $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ 과 같은 의미이며 다음과 같이 계산한다.

$$q_1 q_2 = \{\eta_1\eta_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \eta_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2\}$$

Conjugate:

쿼터니언의 conjugate는 다음과 같이 정의된다. 즉, 쿼터니언의 벡터 부분 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 의 부호를 바꿈으로 구한다.

$$q^* = \{\eta,\ -\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

쿼터니언의 곱의 conjugate는 다음 특성을 만족한다:

$$(q^*)^* = q,\ (pq)^* = q^* p^*$$

Norm:

쿼터니언의 놈(norm)은 다음과 같이 정의된다.

$$\|q\| = \eta^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2$$

쿼터니언의 곱의 놈은 다음 특성을 만족한다:

$$\|q^*\| = \|q\|,\ \|pq\| = \|p\|\|q\|$$

Inverse:

쿼터니언의 역(inverse) q^{-1} 은 회전행렬 $\mathbf{R}$ 의 역 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ 과 같은 의미이며 다음과 같이 계산한다.

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Euler Angles to Quaternion

오일러각 $\Lambda = (\phi, \theta, \psi)$ 로 쿼터니언을 다음과 같이 계산한다.

ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:

$$q = \mathrm{Q}(\Lambda) = \mathrm{Q}_z(\psi)\,\mathrm{Q}_y(\theta)\,\mathrm{Q}_x(\phi)$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) - \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) + \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) + \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \end{bmatrix}$$

여기서 각 축별 쿼터니언 변환 함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{Q}_z(\psi) = \{\cos(\psi/2), 0, 0, \sin(\psi/2)\},$$
$$\mathrm{Q}_y(\theta) = \{\cos(\theta/2), 0, \sin(\theta/2), 0\},$$
$$\mathrm{Q}_x(\phi) = \{\cos(\phi/2), \sin(\phi/2), 0, 0\}.$$

XYZ Angles:

$$q = \mathrm{Q}(\Lambda) = \mathrm{Q}_x(\phi)\,\mathrm{Q}_y(\theta)\,\mathrm{Q}_z(\psi)$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2)+\sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) - \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) + \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \end{bmatrix}$$

Calculation of Rotation Matrix using Quaternion

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \eta^2 + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 - \varepsilon_z^2 & 2(\varepsilon_x\varepsilon_y - \eta\varepsilon_z) & 2(\varepsilon_x\varepsilon_z + \eta\varepsilon_y) \\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \eta\varepsilon_z) & \eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3^2 & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z - \eta\varepsilon_x) \\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_z - \eta\varepsilon_y) & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z + \eta\varepsilon_x) & \eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^2 \end{bmatrix}$$

Calculation of Euler Angles using Quaternion

회전행렬 $\mathbf{R}$ 로부터 오일러각을 계산하는 방법을 이용하면 된다. 다음 식에서 사용되는 r_{ij} 는 행렬 $\mathbf{R}$ 의 i 행과 j 열의 원소다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:

θ가 $(-\pi/2,\ \pi/2)$일 때는 다음과 같다.

$$\psi = \operatorname{atan2}\left(r_{21}, r_{11}\right) = \operatorname{atan2}\left(2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \eta\varepsilon_z), \eta^2 + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 - \varepsilon_z^2\right),$$
$$\theta = \operatorname{asin}\left(-r_{31}\right) = \operatorname{asin}\left(-2(\varepsilon_x\varepsilon_z - \eta\varepsilon_y)\right),$$
$$\phi = \operatorname{atan2}\left(r_{32}, r_{33}\right) = \operatorname{atan2}\left(2(\varepsilon_y\varepsilon_z + \eta\varepsilon_x), \eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^2\right).$$

θ가 $(\pi/2,\ 3\pi/2)$일 때는 다음과 같다.

$$\psi = \operatorname{atan2}\left(r_{21}, r_{11}\right) = \operatorname{atan2}\left(-2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \eta\varepsilon_z), -(\eta^2 + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 - \varepsilon_z^2)\right),$$
$$\theta = \operatorname{asin}\left(-r_{31}\right) = \operatorname{asin}\left(-2(\varepsilon_x\varepsilon_z - \eta\varepsilon_y)\right),$$
$$\phi = \operatorname{atan2}\left(r_{32}, r_{33}\right) = \operatorname{atan2}\left(-2(\varepsilon_y\varepsilon_z + \eta\varepsilon_x), -(\eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^2)\right).$$

Calculate Quaternion using Rotation Matrix

회전행렬로부터 쿼터니언은 다음과 같이 계산한다.

$$q = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{4\eta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Quaternion Normalization

쿼터니언이 계속해서 업데이트된다면 수치 계산의 미소한 오류가 누적되어 단위 쿼터니언의 성질이 만족되지 않는다 ($\|\tilde{q}\| \neq 1$). 만일 이러한 쿼터니언 $\tilde{q} = \{\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z\}$ 이 있을 때, 다음과 같이 정규화 될 수 있다.

$$q = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|} = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{\eta}^2 + \tilde{\varepsilon}_x^2 + \tilde{\varepsilon}_y^2 + \tilde{\varepsilon}_z^2}}$$

Derivative of Quaternion

쿼터니언의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\omega q = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}_q \boldsymbol{\omega}$$

여기서

$$\boldsymbol{\Omega}_\omega = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}\times & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad \because\ \boldsymbol{\omega}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_q = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}\times \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & \eta & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & \eta \\ -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \because\ \boldsymbol{\varepsilon}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}$$

이다.