Kalman Filter와 쿼터니언으로 ARS 설계

KITECH 양광웅 작성
Page365@gmail.com

로봇의 자세를 측정하기 위해 Kalman Filter와 쿼터니언(Quaternion)으로 ARS(Attitude Reference System)를 설계한다. 3차원 자이로 센서와 가속도 센서에서 측정한 각도를 Kalman Filter로 융합하여 각도를 계산한다.

Quaternion 정리

쿼터니언은 3개의 벡터 요소와 하나의 스칼라 요소로 구성된다.

$\bar{q} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \eta\}$

오일러각과 쿼터니언 변환

오일러각 ϕ, θ, ψ 로 쿼터니언을 다음과 같이 계산한다.

$\bar{q}(\phi, \theta, \psi) = \bar{q}_z(\phi) * \bar{q}_y(\theta) * \bar{q}_x(\psi)$

여기서

$\bar{q}_z(\phi) = \{0, 0, \sin(\phi/2), \cos(\phi/2)\},$
$\bar{q}_y(\theta) = \{0, \sin(\theta/2), 0, \cos(\theta/2)\},$
$\bar{q}_x(\psi) = \{\sin(\psi/2), 0, 0, \cos(\psi/2)\}.$

위 식에서 쿼터니언의 곱은 다음과 같이 계산한다.

$\bar{q}_1 * \bar{q}_2 = \{\eta_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2, \eta_1\eta_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_2\}$

쿼터니언의 미분

쿼터니언의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2}\bar{q} \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{\omega}\bar{q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}_{q}\boldsymbol{\omega} \qquad (1)$$

여기서

$$\boldsymbol{\Omega}_{\omega} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}\times & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^{T} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad \because \boldsymbol{\omega}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{q} = \begin{bmatrix} \eta & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & \eta & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & \eta \\ -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

이다.

Initialize

쿼터니언을 상태변수 $\mathbf{x}$ 로 잡는다.

$$\mathbf{x} = \bar{q}$$

그리고 다음과 같이 상태변수(쿼터니언)와 공분산 행렬을 초기화 한다.

$$\mathbf{x}_0 = \bar{q}_0 = \{0, 0, 0, 1\}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Predict 과정

System Model

식 (1)을 이산 시스템 모델로 바꾸면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_\omega \Delta t$$

여기서 $\mathbf{\Omega}_\omega$ 는 자이로 센서에서 측정된 각속도에 따라 변하는 행렬이다.

predict

상태변수 $\mathbf{x}$와 공분산 행렬 $\mathbf{P}$는 자이로 센서에서 측정된 각속도에 따라 다음과 같이 예측 된다.
$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}$$

공분산 행렬 $\mathbf{Q}$는 실제 수집된 데이터의 공분산 값을 취하는 것이 적절할 것이다. 하지만 여기서는 다음과 같이 선정하였다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Update 과정

중력가속도로 오일러각 계산

가속도 센서에서 측정한 가속도 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$ 에는 중력가속도와 센서의 가속에 의한 다양한 종류의 가속도가 포함되어있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}^T \mathbf{g} \qquad (\because \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}) \\ &= \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + g_z \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 $\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x & \dot{v}_y & \dot{v}_z \end{bmatrix}^T$ 는 선가속도이며 $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}^T$ 는 관성좌표계에서 중력가속도 값 $(0,\ 0,\ -9.81)$을 가진다.

위 식에서 선가속도 $\dot{\mathbf{v}}$가 0이고 각속도 $\boldsymbol{\omega}$가 0일 때는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = g_z \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

오일러각으로 정리하면 다음과 같다.

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_z}, \quad \sin\theta = -\frac{a_x}{g_z}.$$

Measurement model

측정 모델 $h(\cdot)$는 가속도 센서에서 계산한 쿼터니언을 그대로 사용하기 때문에 다음 식에서와 같이 단위행렬이 된다.

$$h(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Update

측정값 $\mathbf{z}_k$는 중력가속도로부터 계산한 오일러각 ϕ, θ로부터 계산한다.

$$\mathbf{z}_k = \bar{q}(\phi, \theta, 0)$$

상태변수 $\mathbf{x}$와 공분산 행렬 $\mathbf{P}$는 다음과 같이 업데이트 된다.

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_k^-$$

그리고 $\mathbf{R}_k$은 다음과 같이 정한다. 즉, $\|\mathbf{a}\|$가 중력가속도와 크기가 비슷하다면 다른 가속도 성분

의 영향이 적은것으로 보아 업데이트 비율을 높이고, $\|\mathbf{a}\|$ 가 중력가속도와 크기 차이가 난다면 업데이트 비율을 줄여준다.

$$\mathbf{R}_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{if } \|\mathbf{a}\| \approx 9.81, \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} & \text{else.} \end{cases}$$