Bezier Surface Fitting

Bezier Surface에 대한 정리

(Wikipedia 참조: http://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_surface)

(m,n)차수의 Bezier surface는 (m+1)x(n+1)개의 컨트롤 포인트 집합 $k_{i,j}$ 에 의해 정의된다. 이차원 Bezier surface의 한 점 $\mathbf{p}$ 는 다음과 같이 정의된다:

$$\mathbf{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(u)B_j^m(v)k_{i,j}$$

여기서

$B_i^n(u)=\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i}$ 는 Bernstein polynomial이고

$\binom{n}{i}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ 은 binomial coefficient 이다.

Bezier Surface Fitting

25개 이상의 점 $P_i(x_i,y_i,z_i)$ 이 주어졌을 경우 5x5개의 컨트롤 포인트($n=4,m=4$)를 가지는 Bezier Surface를 피팅 하는 것은 다음과 같다.

먼저 모든 점에 대해 x_i,y_i 를 unit square내의 값 u_i,v_i 로 변환한다.

$$u_i=\frac{x_i-x_{min}}{x_{max}-x_{min}},$$
$$v_i=\frac{y_i-y_{min}}{y_{max}-y_{min}}$$

그리고 Bezier surface 식에 P_i 를 순차적으로 대입하여 연립방정식으로 만든 후 행렬로 표현하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^n(u_1)B_0^m(v_1) & B_0^n(u_1)B_1^m(v_1) & B_0^n(u_1)B_2^m(v_1) & \cdots & B_n^n(u_1)B_m^m(v_1) \\ B_0^n(u_2)B_0^m(v_2) & B_0^n(u_2)B_1^m(v_2) & B_0^n(u_2)B_2^m(v_2) & \cdots & B_n^n(u_2)B_m^m(v_2) \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{0,0} \\ k_{0,1} \\ k_{0,2} \\ \vdots \\ k_{n,m} \end{bmatrix}
$$

상기 식은 $\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{k}$ 형태이므로 Pseudo-inverse로 해를 구하면 된다.

$$
\mathbf{k} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}
$$