

Topic 1-1 함수의 기초

1. 함수의 의미

- 변수 y 의 값이 다른 변수 x 의 값에 의해 결정될 때 y 는 x 의 함수(function)이라고 한다. 이 때 x 를 독립변수(independent variable), y 를 종속변수(dependent variable)라고 부른다. 독립변수가 1개인 함수를 특히 1변수함수라고 부른다.

1변수 함수의 기본형 : $y = f(x)$

- 그런데 독립변수가 두 개 이상인 경우도 있다. 이러한 함수를 다변수함수(function of several variables)라고 부른다. 예를 들어 y 가 x 와 z 이라는 2개의 독립변수에 의해 결정될 때의 함수는 다음과 같다.

2변수 함수의 기본형 : $y = f(x, z)$

2. 중요한 1변수 함수의 형태

- 1) 상수함수(constant function) 2) 1차 함수(선형함수 : linear function)



- 3) 2차 함수

- 4) 분수함수



5) 지수함수



6) 로그함수



7) n 차 거듭제곱함수(power function)¹⁾



1) 거듭제곱함수를 멍함수(冪函數)란 이름으로 부르기도 한다.

3. 1차함수의 주요연습

－ 1. 기울기가 a 이고 수직축 절편이 b 인 1차 함수의 형태 $\Rightarrow$ _____

* y 축 절편은 x 값이 0일 때 y 의 값을 의미, x 축 절편은 y 값이 0일 때의 x 값을 의미

2. (b, c) 를 지나며 기울기가 a 인 1차 함수의 형태 $\Rightarrow$ _____

4. 2차함수의 주요연습

－ 1. 꼭지점이 (b, c) 인 2차 함수의 형태 $\Rightarrow$ _____

2. $y = ax^2 + bx + c$ 인 경우 $\Rightarrow$ 근의 공식 : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

5. 함수의 이동

가. 1차함수의 예

－ $y = ax + b$ 를 x 축으로 c , y 축으로 d 만큼 이동시킨 함수 $\Rightarrow$ _____

나. 일반형의 경우

－ $y = f(x)$ 를 x 축으로 a 만큼 이동 $\Rightarrow$ _____

$y = f(x)$ 를 y 축으로 b 만큼 이동 $\Rightarrow$ _____

$y = f(x)$ 를 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 이동 $\Rightarrow$ _____

6. 함수와 역함수

가. 의미

－ 역함수(inverse function)란 y 가 x 의 함수일 때, 역으로 x 를 y 의 함수로 나타낸 것을 말한다. 원래의 함수를 f 라 할 때 보통 f^{-1} 로 나타낸다.

나. 도출방법

－ 1단계 : ' $y =$ ' 형태의 함수를 ' $x =$ '의 형태로 바꾼다.2)
2단계 : x 와 y 를 바꾼다.

ex> $y = 2x - 4$ 의 역함수를 구하라.

2) 이를 ' x 에 관하여 정리한다.'라고 표현하기도 한다.

Topic 1-2 경제학에서의 기초적인 함수 : 수요함수와 공급함수

1. 경제학에서의 함수표현의 특징

- 독립변수를 수평축에, 종속변수를 수직축에 두는 것이 수학에서의 일반적인 관행이다. 그러나 경제학에서 사용되는 가장 기초적인 함수인 수요함수와 공급함수의 경우에는 수평축에 종속변수인 수량을 두고 수직축에 독립변수인 가격을 둔다.³⁾

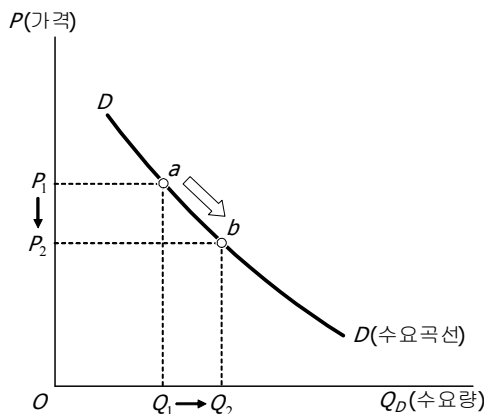
2. 수요함수

- 수요함수(demand function)란 주어진 가격에서 얼마만큼의 수량이 수요되는지를 나타내는 함수이다.

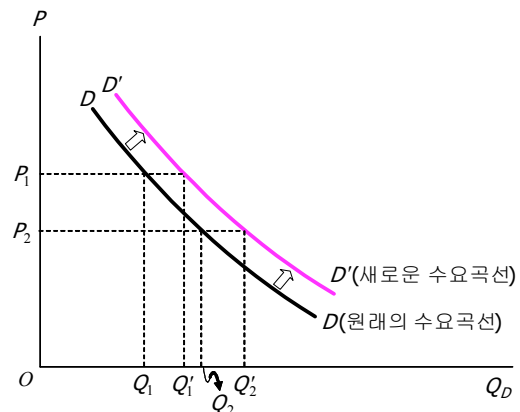
$$\text{수요함수 : } Q_D = f(P; P_R, M, N, T, \dot{P}^e)$$

P_R : 연관재의 가격, M : 소득, N : 소비자의 수, T : 기호, 취향

P : 해당재화의 가격, $\dot{P}^e$: 가격상승에 대한 예상⁴⁾



(i) 수요곡선상의 이동



(ii) 수요곡선의 이동

- 수요함수와 같은 다변수 함수를 2차원평면에 나타내는 방법 중 하나는 독립변수 중 가장 중요한 변수를 축 상에 나타낸 후 해당변수의 변화는 곡선상의 이동으로, 다른 변수의 변화는 곡선의 이동으로 나타내는 것이다.
- 수요를 결정하는 가장 중요한 요인은 그 재화의 가격이므로 이를 축 상에 둔다. 따라서 가격의 변화는 곡선상의 이동(movement along the curve)이며 그 외의 변화는 곡선의 이동(shift in the curve)이 된다.

3) 이를 마샬의 전통(Marshallian tradition)이라고 한다. 처음에는 혼란스럽지만 차차 익숙해져갈 것이다. 이러한 전통은 가격이 높다 또는 낮다고 표현하는 언어관행에도 맞아 직관적인 이해에 도움이 되기도 한다.

4) $\dot{P}^e$ 에 사용된 위 점(dot)은 다양한 의미로 쓰이는데 주로 해당변수의 변화율이나 변화분, 또는 기간당 변화분을 의미한다. 그리고 위 첨자 e 는 이 값이 예상치(expected value)임을 의미한다. 이러한 기호들이 모든 교과서에서 동일하게 사용되는 것은 아니므로 조심하도록 하자.

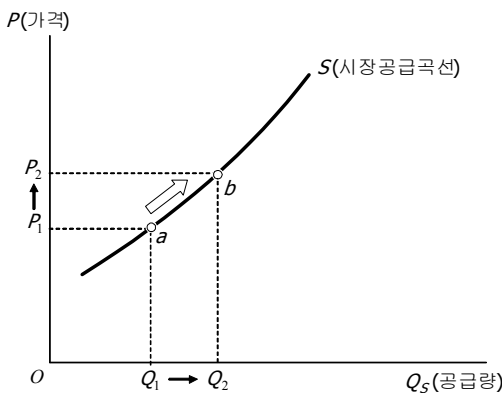
3. 공급함수

- 공급함수(supply function)란 주어진 가격에서 얼마만큼의 수량이 공급되는지를 나타내는 함수이다.

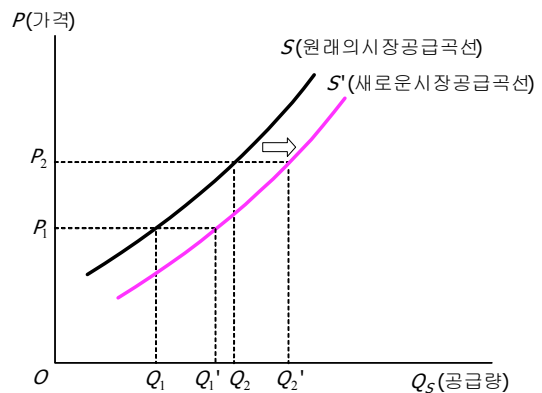
$$\text{공급함수 : } Q_S = g(P; \omega, H, C, E, \dot{P}^e)$$

ω : 생산요소가격, H : 생산기술, C : 공급자의 수, E : 미래에 대한 기대

P : 해당재화의 가격, $\dot{P}^e$: 가격상승에 대한 예상



(i) 공급곡선상의 이동



(ii) 공급곡선의 이동

- 공급을 결정하는 가장 중요한 요인 역시 그 재화의 가격이므로 이를 축 상에 둔다. 따라서 가격의 변화는 곡선상의 이동이며 그 외의 변화는 곡선의 이동이 된다.

4. 수요곡선과 공급곡선의 연습

가. 수요곡선의 형태

$$Q_D = f(P) = a - bP$$

나. 공급곡선의 형태

$$Q_S = g(P) = c + dP$$

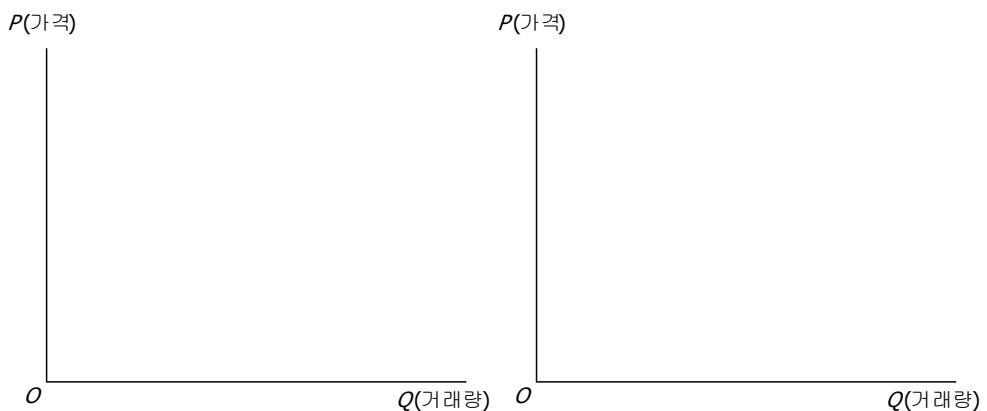
다. 곡선의 이동

- 1. 수요곡선을 T 만큼 아래로 이동
- 2. 공급곡선을 T 만큼 상방으로 이동

5. 수요곡선의 재해석

- 수요함수(demand function)란 원래 주어진 가격에서 얼마만큼의 수량이 수요되는지를 나타내는 함수이다.
- 그러나 이를 다른 방향에서 보면 마지막 1단위를 구입하기 위해 최대한 얼마의 금액을 지급할 의사가 있는지를 나타내는 곡선, 즉 지급의사곡선(willingness to pay : WTP)이라고 볼 수 있다.
- 또한 수요자의 지급의사는 소비자가 마지막 1단위에 얼마의 만족을 느끼는지를 반영하므로 수요곡선은 한계편익곡선(marginal benefit : MB)으로 해석할 수도 있다.

$$\text{수요곡선}(D) = \text{지급의사곡선}(WTP) = \text{한계편익곡선}(MB)$$



6. 공급곡선의 재해석

- 공급함수(supply function)란 원래 주어진 가격에서 얼마만큼의 수량이 공급되는지를 나타내는 함수이다.
- 그러나 이를 다른 방향에서 보면 마지막 1단위를 판매하기 위해 최소한 얼마의 금액을 수취할 의사가 있는지를 나타내는 곡선, 즉 수취의사곡선(willingness to accept : WTA)이라고 볼 수 있다.
- 또한 공급자의 수취의사는 공급자가 마지막 1단위에 얼마의 비용을 들였는지를 반영하므로 공급곡선은 한계비용곡선(marginal cost : MC)으로 해석할 수도 있다.

$$\text{공급곡선}(S) = \text{수취의사곡선}(WTA) = \text{한계비용곡선}(MC)$$

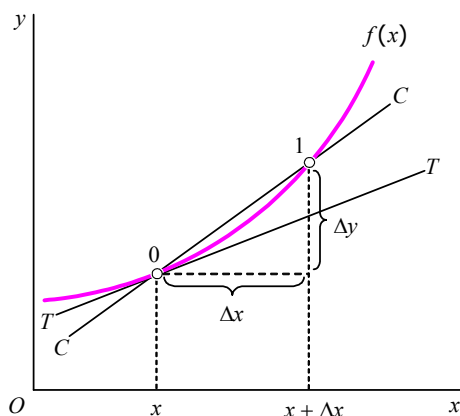
* 이처럼 경제학에는 동일한 곡선이라도 여러가지 이름을 가지고 있는 경우가 많기 때문에 유의해야 한다.

Topic 2-1 미분의 기초

1. 미분(微分, differential)의 의미

- 1. ‘아주 작은 변화’
- 2. 함수의 기울기를 구하는 작업

2. 기호의 이해



- Δx : 변수 x 의 변화분 dx : 변수 x 의 매우 작은 변화분⁵⁾
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 변수 x 와 y 의 변화의 비율, $x-y$ 평면에서 두 점을 이은 직선(CC)의 기울기
- $\frac{dy}{dx}$: 변수 x 와 변수 y 의 매우 작은 변화의 비율, $x-y$ 평면에서의 함수의 기울기 또는 접선(TT)의 기울기⁶⁾

3. 여러 가지 미분의 표시방법과 경제학적 의미

- $y = f(x)$ 로 주어져 있다고 할 때,

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

- $\frac{dy}{dx}$ 를 포함한 위 표기방법은,

1. $y = f(x)$ 로 정리된 식을 x 로 미분하였음을 의미하는데
2. 이는 모두 $x-y$ 평면에서 접선의 기울기를 의미한다.
3. 그런데 $x-y$ 평면에서 접선의 기울기란 ‘ x 가 한 단위 증가했을 때 y 가 얼마나 변하는지’를 의미한다. 따라서 미분의 개념은 경제학에서 정의되는 ‘한계(marginal)’의 개념과 유사함을 알 수 있다.⁷⁾

5) Δx 가 0에 수렴하는 극한의 개념이 dx 라고 생각하면 크게 무리가 없을 것이다.

6) 수학과 물리학에서는 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 를 평균변화율, $\frac{dy}{dx}$ 를 순간변화율이라고 부르기도 한다.

7) 경제학에서 ‘한계적 변화’란 현재 상태에서의 추가적인 작은 변화를 의미한다.

4. 미분의 기본공식

$$- \quad y = f(x) = x^n \Rightarrow y' = f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. 미분의 연습-1

$$- \quad y = 2x + 3$$

$$- \quad y = 2x^2 + 3x$$

$$- \quad y = \frac{1}{x}$$

$$- \quad y = \sqrt{x}$$

$$- \quad y = \ln x^{(8)}$$

6. 미분의 기본법칙

가. 합, 차의 미분

$$\begin{aligned} - \quad y &= f(x) \pm g(x) \\ y' &= f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

나. 곱의 미분

$$\begin{aligned} - \quad y &= f(x)g(x) \\ y' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

다. 합성함수의 미분

$$\begin{aligned} - \quad y &= f[g(x)] \\ y' &= f'[(g(x))]g'(x) \end{aligned}$$



1. 자연로그를 미분하면 _____ 가 된다.
2. 합성함수는 곱으로, 곱함수는 합으로!

8) $\ln$ 은 밑이 e 인 로그함수로서 자연로그(natural log)의 약자이다. 자연로그는 경제학에서 자주 쓰이므로 이 함수의 성질을 잘 알아 놓도록 하자. e 는 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 으로 정의되는 비순환무한소수로 2.71828... 의 값을 갖는다. e 를 초월수라고도 한다.

7. 미분의 연습-2

$$- \quad y = 3x + 2x$$

$$- \quad y = x + \frac{100}{x}$$

$$- \quad y = 3x \times (2x^2 + 1)$$

$$- \quad y = \sqrt{2x^2 + 3x}$$

$$- \quad y = \frac{1}{3x^2 + 2x}$$

$$- \quad y = \ln x \times \sqrt{3x + 2}$$

8. 미분의 연습-3

가. $TR = P \times Q$ 이고 $P = P(Q)$ 일 때, 다음을 구하라.

$$- \quad \frac{dTR}{dP} =$$

$$- \quad \frac{dTR}{dQ} =$$

9)

나. 다음 식을 구하라.

$$- \quad x = \frac{M}{P_X + P_Y} \text{ 일 때 } \frac{dx}{dP_X} =$$

9) 이 공식을 Amoroso-Robinson 공식이라고 한다. 유용하게 사용되는 공식이므로 암기하기 바란다.

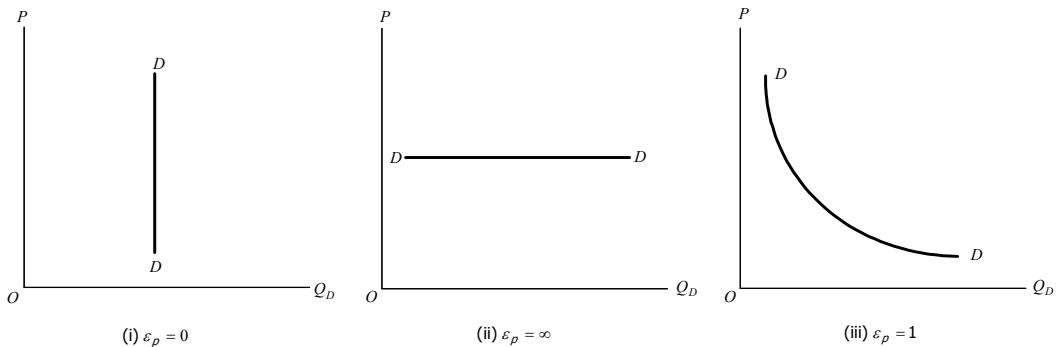
Topic 2-2 기초적인 미분의 연습 : 수요와 공급의 탄력성

1. 수요의 가격탄력성

가. 정 의

- 수요의 가격탄력성(price elasticity of demand)이란 어느 재화가 가격이 변화할 때 그 재화의 수요량이 얼마나 변하는지를 나타내는 지표로서 수요량의 변화율을 가격의 변화율로 나눈 수치이다.

$$\text{수요의 가격탄력성} : \epsilon_P = - \frac{\text{수요량의 변화율}}{\text{가격의 변화율}} = - \frac{\Delta Q_D / Q_D}{\Delta P / P} = - \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} \frac{P}{Q_D}$$

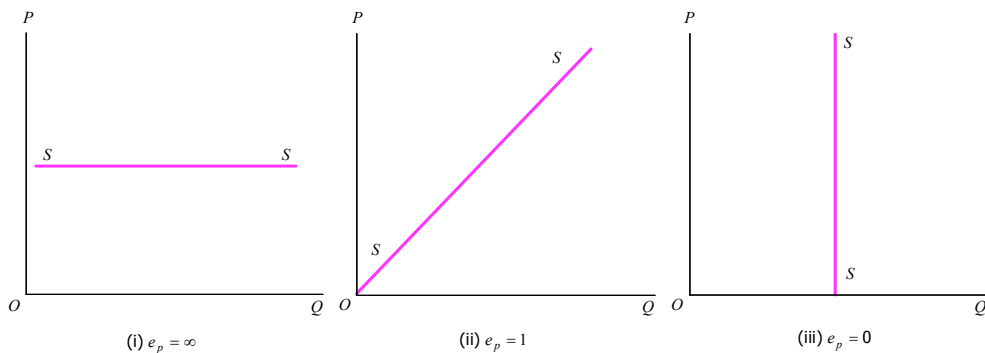


2. 공급의 탄력성

가. 정 의

- 공급의 탄력성(price elasticity of supply)이란 어느 재화의 가격이 변할 때 그 재화의 공급량이 얼마나 변하는지를 나타내는 지표로서 공급량의 변화율을 가격변화율로 나눈 수치로 구해진다.

$$\text{공급의 가격탄력성} : e_P = \frac{\text{공급량의 변화율}}{\text{가격의 변화율}} = \frac{\Delta Q_S / Q_S}{\Delta P / P} = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \frac{P}{Q_S}$$



3. 수요곡선이 다음과 같을 때 각각의 가격탄력성을 구해 보아라.

– (1) $Q_D = a - bP$ (2) $Q_D = \frac{100}{P}$ (3) $Q_D = \frac{100}{P^n}$

4. 공급곡선이 다음과 같을 때 각각의 가격탄력성을 구해 보아라.

– (1) $Q_S = c + dP$ (2) $Q_S = cP$ (3) $Q_S = cP^n$

Topic 2-3 평균과 한계의 개념

1. 개념정의

- 한계(marginal)란 현재 상태에서 발생한 약간의 변화가 유발한 효과를 나타낸 것이다.
- 평균(average)이란 현재 상태까지 발생한 모든 변화를 비율로 나타낸 것이다.

2. 생산함수의 정의¹⁰⁾

- 총생산 : $TP_L = F(L)$
- 평균생산 : $AP_L = \frac{F(L)}{L}$ $\Rightarrow$ _____
- 한계생산 : $MP_L = \frac{dF(L)}{dL}$ or $MP_L = F(L) - F(L-1)$
 $\Rightarrow$ _____

3. 생산함수의 예시-1

* 다음 빈칸을 메워 보아라.

노동투입량	1	2	3	4
총생산	100	180	240	300
평균생산	100	90	(1)	75
한계생산	(2)	(3)	60	(4)

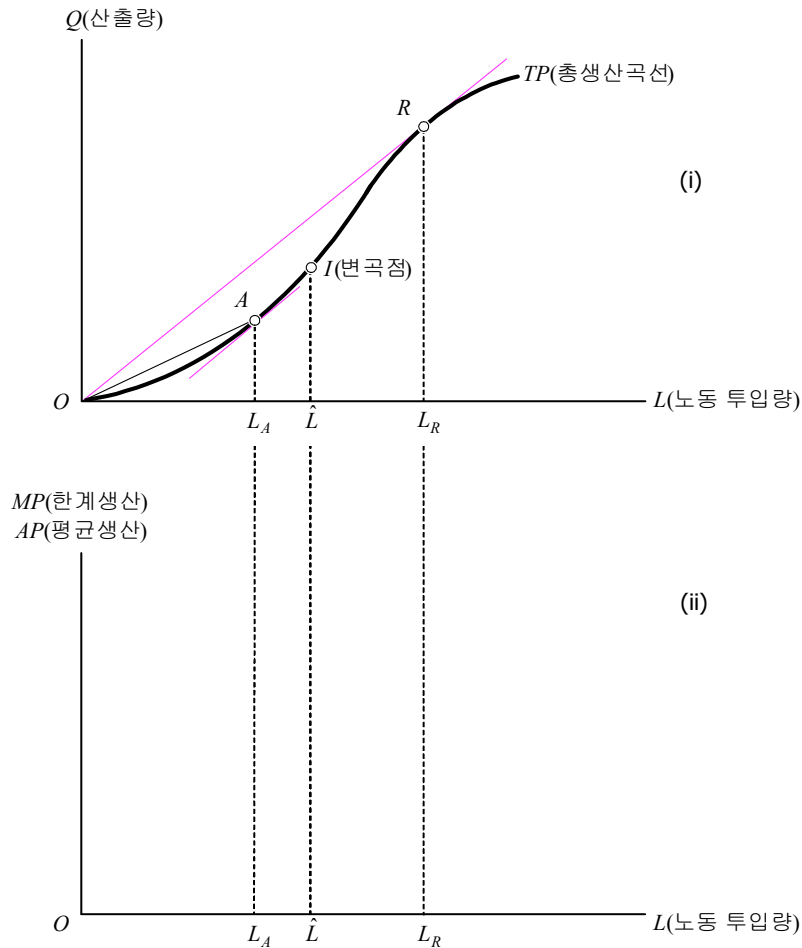
4. 생산함수의 예시-2

* 총생산함수가 다음과 같이 주어졌을 때, 평균생산함수와 한계생산함수를 구해보아라.

- 총생산 : $TP_L = F(L) = \sqrt{L}$
- 평균생산 : $AP_L = \frac{F(L)}{L}$
- 한계생산 : $MP_L = \frac{dF(L)}{dL}$

10) 개념이해를 위해 단순화하여 일단 1요소만을 나타내었다.

5. 평균과 한계의 기하학적 의미



6. 한계생산과 평균생산간의 관계

가. 수 식

$$\begin{aligned}
 - \frac{dAP_L}{dL} &= \frac{d[F(L)/L]}{dL} = \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{dF(L)}{dL} - \frac{F(L)}{L} \right] \\
 &= \frac{1}{L} [\quad - \quad]
 \end{aligned}$$

나. 해 석

- 한계생산이 평균생산보다 작을 때는 평균생산이 하락한다.(역도 성립)
- 한계생산이 평균생산보다 클 때는 평균생산이 상승한다.(역도 성립)
- 한계는 평균의 극점을 통과한다.

Topic 3-1 함수의 극대와 극소

1. 1계미분의 의미

가. 수식

$$- \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

나. 의미

- 1계미분값의 부호는 ‘함수값의 증감’을 의미한다. 즉 $f'(x) > 0$ 이면 함수값이 증가하고, $f'(x) < 0$ 이면 함수값이 감소하며, $f'(x) = 0$ 이면 함수값이 일정하다.
- 1계미분의 크기는 함수값의 변화정도 즉 ‘함수의 기울기’의 크기를 의미한다. 즉 $f'(x)$ 가 커질수록 기울기가 가팔라진다.

2. 2계미분의 의미

가. 수식

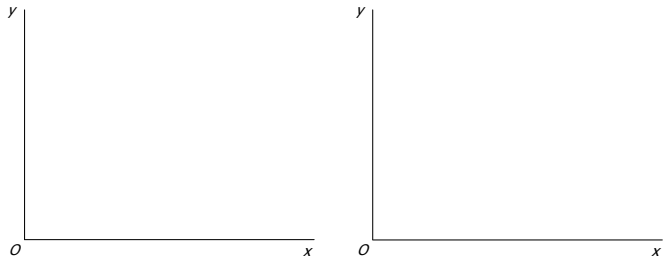
$$- \quad y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

나. 의미

- 2계미분값의 부호는 ‘기울기(1계 미분값)의 증감’을 의미한다. 즉 $f''(x) > 0$ 이면 기울기는 증가하고, $f''(x) < 0$ 이면 기울기는 감소하며, $f''(x) = 0$ 이면 기울기가 일정하다.
- 2계미분의 크기는 ‘기울기의 변화정도’를 의미하는 것으로 일반적으로 이 값이 클수록 함수의 곡률이 크다. 즉 $f''(x)$ 의 절대값이 커질수록 함수가 오목해지거나 볼록해진다.

3. Graph 연습

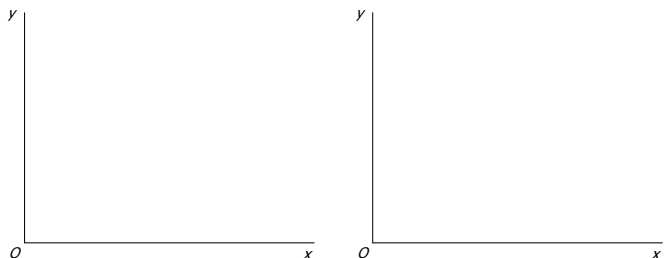
가. $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$



나. $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$

다. $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

라. $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$



4. 함수의 극대, 극소 조건

가. 극대값을 가질 조건

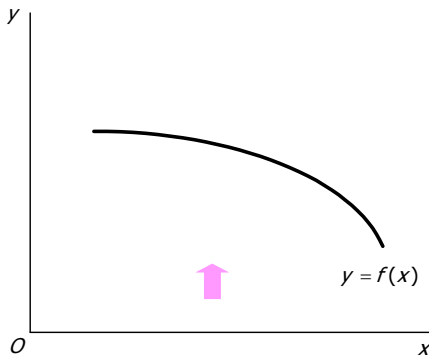
$$- f'(x) = 0, f''(x) < 0$$

나. 극소값을 가질 조건

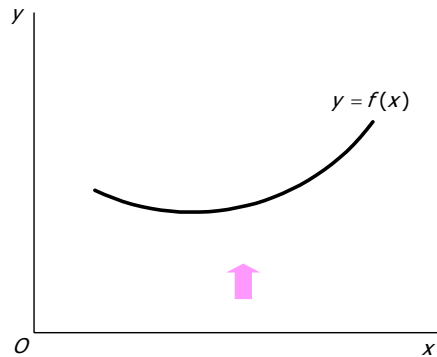
$$- f'(x) = 0, f''(x) > 0$$

ex> $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 12$ 일 때 극대 및 극소값을 갖는 x 를 찾아라.

5. 볼록성(convexity)과 오목성(concavity)

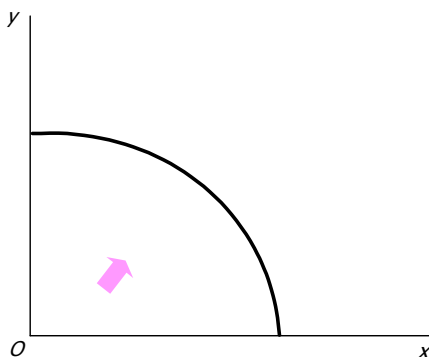


(i) 오목한 곡선

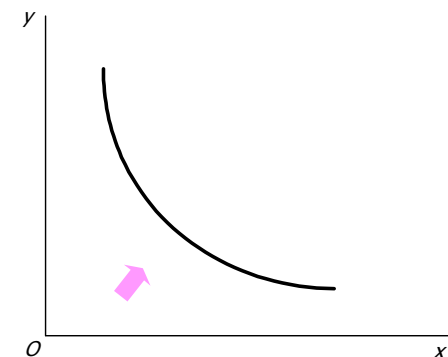


(ii) 볼록한 곡선

6. 원점에 대한 볼록성(convexity to the origin)과 오목성(concavity to the origin)



(i) 원점에 대해 오목한 곡선



(ii) 원점에 대해 볼록한 곡선